

АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.01

ТЕЧЕНИЕ ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ В ДЛИННЫХ МИКРОКАНАЛАХ

К. В. Жуковский

(кафедра оптики и спектроскопии)

E-mail: th180@phys.msu.su

Рассмотрено стационарное течение трехмерных сжимаемых изотермических потоков в длинных микроканалах с учетом молекулярных эффектов. С использованием разложения уравнения Навье–Стокса по малому параметру (отношение высоты канала к его длине) получены решения для продольной компоненты скорости потока, распределения давления и потока массы в канале. Проанализировано влияние эффектов сжимаемости и разрежения на динамику газового потока, а также имеющего место на микромасштабах скольжения потока относительно стенок канала на давление, профили скоростей и величину потока массы.

Введение

Исследование течения разреженных газов в каналах проводится, как правило, для инженерных целей и представляет интерес для вакуумной физики (см., напр., [1]). В последнее время в результате достижений в микротехнологии возникла

новая задача — изучение потоков в каналах на микромасштабах (см., напр., [2]). Микромеханические структуры обычно имеют характерные размеры порядка 1 мкм и часто существуют в газовой среде при стандартных условиях. Отношение средней длины пробега молекул при атмосферных условиях

(~ 70 нм) к характерным масштабам длины микроскопических объектов является заметным, поэтому следует учитывать влияние молекулярных эффектов на динамику газовых потоков. Заметим, что роль молекулярных эффектов сводится в основном к эффекту скольжения [3, 4], который изменяет вид граничных условий для вязкого газа (см. ниже). Вследствие большого перепада давления в микроканалах требуется учитывать сжимаемость газовой среды [2, 5–8]. Теоретические и экспериментальные исследования газовых потоков в микроканалах показали, что эффекты скольжения и температурные эффекты увеличивают поток массы [8–11]. Следует отметить, что до настоящего времени отсутствует надежное соответствие между экспериментальными результатами и теоретическими предсказаниями (см. работы [12–14] и [15, 16], где исследования сжимаемых потоков и потоков малой плотности проводились отдельно). Недавно были найдены решения уравнения Навье–Стокса (НС) в нулевом порядке теории возмущений с учетом сжимаемости и скольжения микропотока газа между бесконечными параллельными пластинами [17]. Однако в случае реального распространения потока в микроканалах конечного сечения (например, прямоугольной формы) необходимо изучение трехмерных потоков.

В настоящей работе исследуется трехмерный поток сжимаемой жидкости с учетом молекулярных эффектов. Анализируются характеристики обмена импульсом между средой и стенками микроканала и выясняется влияние сжимаемости и плотности среды на ее динамику. Рассматриваются каналы прямоугольной и треугольной формы. При этом используется канонический формализм с целью дальнейшего обобщения на другие более сложные поля потоков. Проводится пертурбативное разложение уравнения НС для трехмерного стационарного изотермического потока в канале с малым отношением высота–длина для произвольного профиля потока. Получены решения нулевого порядка для продольной компоненты скорости, распределения давления и потока массы.

1. Течение сжимаемой среды со скольжением в длинных микроканалах

Рассмотрим трехмерную задачу о стационарном потоке сжимаемой среды в длинном (длина L) и узком (высота h) канале. Предположим, что, согласно гипотезе Стокса, параметры среды подчиняются соотношению $\lambda + (2/3)\mu = 0$, где $\mu = \text{const}$ — молекулярная вязкость, λ — второй коэффициент вязкости. Система уравнений непрерывности и НС может быть записана в виде

$$\varepsilon \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u})}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{v})}{\partial\tilde{y}} = 0,$$

$$\text{Re} \cdot \tilde{\rho} \left(\varepsilon \tilde{u} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{z}} \right) = -\varepsilon \frac{\text{Re}}{M^2\gamma} \frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{y}^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{z}^2} + \frac{1}{3} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}^2} + \varepsilon \frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{y}} + \varepsilon \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{z}} \right),$$

$$\text{Re} \cdot \tilde{\rho} \left(\varepsilon \tilde{u} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{z}} \right) = -\frac{\text{Re}}{M^2\gamma} \frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{x}^2} + \frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{y}^2} + \frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{z}^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{y}^2} + \varepsilon \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{y}} + \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{y}\partial\tilde{z}} \right),$$

$$\text{Re} \cdot \tilde{\rho} \left(\varepsilon \tilde{u} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{z}} \right) = -\frac{\text{Re}}{M^2\gamma} \frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{z}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{x}^2} + \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{y}^2} + \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{z}^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{z}^2} + \varepsilon \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{z}} + \frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{y}\partial\tilde{z}} \right).$$

Здесь $\text{Re} = \tilde{\rho}\tilde{u}h/\mu$, $M = \tilde{u}/c$ — числа Рейнольдса и Маха соответственно, причем тильдой обозначены безразмерные переменные, введенные согласно выражениям $u = \tilde{u}\tilde{u}$, $v = \tilde{v}\tilde{v}$, $x = \tilde{x}L$, $y = \tilde{y}h$, $\rho = \tilde{\rho}\tilde{\rho}$, $p = \tilde{p}\tilde{p}$ вместо переменных $\mathbf{u} = (u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $\rho = \rho(x, y)$, $p = p(x, y)$. Чертой сверху обозначены значения переменных на выходе канала. Отношение $h/L = \varepsilon$ в дальнейшем считается малым ($\varepsilon \ll 1$), что представляется вполне оправданным для длинных микроканалов. Предположим также, что среда может быть приближенно описана уравнением состояния для идеального газа $p = \rho RT$, где R — удельное значение газовой постоянной. Записанная выше система уравнений НС должна быть решена со следующими граничными условиями [3]: без скольжения, т.е. когда скорость на стенке нулевая, $\tilde{u} = 0$, $\tilde{v} = 0$, и со скольжением, т.е. когда на стенке $\tilde{u} = \text{Kn} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\mathbf{n}}$, где $\text{Kn} = \Lambda/h$ — число Кнудсена, Λ — средняя длина пробега молекул.

Граничные условия, учитывающие скольжение, вводят поправки к уравнению НС для непрерывного потока, обязанные молекулярным эффектам. Из кинетической теории газов следует соотношение $\text{Kn} \sim M/\text{Re}$. Математически число Кнудсена может иметь широкий спектр значений. Для простоты выберем типичный режим «микропотока», т.е. $\text{Re} \sim O(\varepsilon)$, $M \sim O(\varepsilon)$. Теперь можно провести разложение u, v и p по степеням ε :

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \varepsilon\tilde{u}_1 + \varepsilon^2\tilde{u}_2 + \dots, \quad \tilde{v} = \varepsilon\tilde{v}_1 + \varepsilon^2\tilde{v}_2 + \dots,$$

$$\tilde{w} = \varepsilon\tilde{w}_1 + \varepsilon^2\tilde{w}_2 + \dots, \quad \tilde{p} = \tilde{p}_0 + \varepsilon\tilde{p}_1 + \varepsilon^2\tilde{p}_2 + \dots$$

Следует заметить, что нормальные компоненты скорости в нулевом приближении v_0 , w_0 исчезают согласно уравнению непрерывности: $v_0 \equiv 0$, $w_0 \equiv 0$. Тогда y - и z -уравнения в низшем порядке теории возмущений дают $\tilde{p}_0 = \tilde{p}_0(\tilde{x})$. Ниже уравнение НС для трехмерного потока будет проинтегрировано в следующих двух случаях: в отсутствие молекуляр-

ных эффектов (течение без скольжения в прямоугольном и треугольном каналах) и с учетом молекулярного скольжения в прямоугольном канале.

2. Отсутствие молекулярных эффектов.

Течение сжимаемого потока без скольжения

Для начала рассмотрим задачу в нулевом порядке по ϵ в пренебрежении молекулярными эффектами. Проведем интегрирование x -уравнения НС для канала с сечением в виде равностороннего треугольника: $\tilde{z} = \sqrt{3}/2$, $\tilde{y} = \tilde{z}/\sqrt{3}$, $\tilde{y} = -\tilde{z}/\sqrt{3}$, $\tilde{y} \in [-1/2, 1/2]$, $\tilde{z} \in [0, \sqrt{3}/2]$. В результате получим следующие выражения для скорости и давления:

$$\tilde{u}_0(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{x}) = -\frac{\epsilon Re \cdot (1 - P^2)}{M^2 \gamma \sqrt{\tilde{x}(1 - P^2) + P^2}} \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \left(\tilde{z} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (3\tilde{y}^2 - \tilde{z}^2),$$

$$\tilde{p}_0(\tilde{x}) = \sqrt{\tilde{x}(1 - P^2) + P^2},$$

где $P = p_{in}/p_{out}$ — коэффициент падения давления.

Рассмотрим теперь течение без скольжения в канале прямоугольного сечения с граничными условиями $\tilde{y} \in [-1/2, 1/2]$, $\tilde{z} \in [-\kappa/2, \kappa/2]$, где $\kappa = b/a$ — отношение сторон прямоугольника. Интегрирование x -уравнения НС в нулевом порядке теории возмущений приводит к следующему результату для продольной компоненты скорости сжимаемого потока:

$$\tilde{u}_0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = -\frac{2\epsilon Re \cdot (1 - P^2)}{\pi^3 M^2 \gamma \sqrt{\tilde{x}(1 - P^2) + P^2}} \times \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} \cos(\pi n \tilde{y}) \left(1 - \frac{\text{ch}(\pi n \tilde{z})}{\text{ch}(\pi n \kappa/2)} \right).$$

Действие уменьшающегося вдоль потока давления учитывается множителем в выражении для продольной компоненты скорости, причем нормальные компоненты скорости равны нулю. Распределение давления для случая треугольного, прямоугольного или любого другого сечения оказывается одинаковым, так как в этой модели профиль скорости по сечению не зависит от локального давления.

3. Течение с молекулярным скольжением

Теперь рассмотрим молекулярные эффекты для случая прямоугольного канала, введя конечное число Kn для данной модели: $Kn(\partial u / \partial \mathbf{n})|_{\text{wall}} = u|_{\text{wall}}$. После соответствующих преобразований и применения на заключительном этапе \cos -преобразования Фурье приходим к следующему трансцендентному уравнению: $q \text{tg}(q/2) = 1/Kn$. Его корни q_i

определяют структуру ряда в выражении для скорости скользящего потока сжимаемой жидкости (получаемом в нулевом порядке из уравнения для x -компоненты импульса):

$$\tilde{u}_0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\epsilon Re}{M^2 \gamma} \frac{d\tilde{p}_0(\tilde{x})}{d\tilde{x}} \tilde{u}_0(\tilde{y}, \tilde{z}),$$

$$q_i \text{tg}(q_i/2) = 1/Kn,$$

$$\tilde{u}_0(\tilde{y}, \tilde{z}) = -\sum_i \frac{2 \sin(q_i/2)}{1/2 + Kn \sin^2(q_i/2)} \frac{\cos(q_i \tilde{y})}{q_i^3} \times \left(1 - \frac{\text{ch}(q_i \tilde{z})}{\text{ch}(q_i \kappa/2) + q_i Kn \text{sh}(q_i \kappa/2)} \right). \tag{1}$$

Здесь число Kn предполагается постоянным. Распределение давления остается таким же, как и для течения без скольжения. При этом вклады молекулярных эффектов учитываются независимым от эффекта сжимаемости образом. Поскольку значение Kn зависит от давления, приведенные выражения (1) можно применять, если для Kn принять некоторое среднее значение вдоль канала. Если же считать Kn локальным параметром, то приходим к дифференциальному уравнению для давления, записанному в виде бесконечного ряда, каждый член которого включает давление не алгебраически, а неявно, через корни трансцендентного уравнения. Даже если найдено приближенное решение трансцендентного уравнения, интегрирование дифференциального уравнения приводит к решению для $\tilde{p}_0(\tilde{x}_0)$ только в неявной форме.

К счастью, можно избежать рассмотрения этой нетривиальной задачи, учитывая, что распределение давления одинаково для любой геометрии канала, если считать параметр Kn глобальным. Более того, следует заметить, что в случае потока между параллельными плоскостями нелинейность в распределении давления возникает главным образом за счет эффектов сжимаемости, причем вклад члена с локальным числом Kn представляет собой лишь малую поправку [17].

Если рассматривать канал с сечением в виде прямоугольника, треугольника или любой другой формы с одним и тем же характерным масштабом длины l , то физическую природу молекулярных эффектов, зависящую главным образом от l , можно считать одинаковой. Таким образом, член, содержащий число Kn , представляет собой лишь поправку к профилю распределения давления, задаваемому сжимаемостью. Следовательно, разумно предположить, что в этом приближении выражение для давления имеет вид $\tilde{p}_0(\tilde{x}) = \sqrt{\tilde{x}(1 - P^2) + P^2} + O(Kn)$. Локальное число Kn можно ввести согласно равенству

$$Kn = \frac{Kn'}{\sqrt{\tilde{x}(1 - P^2) + P^2}},$$

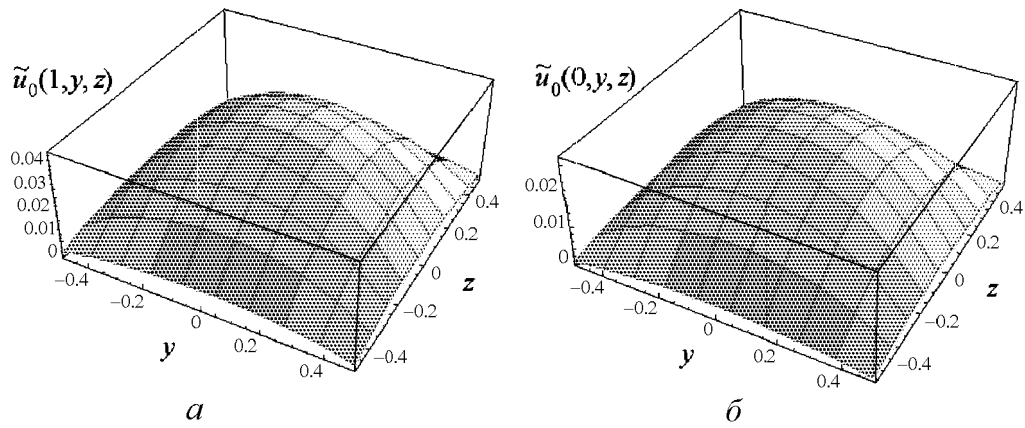


Рис. 1. Профиль безразмерной скорости на выходе (а) и входе (б) канала прямоугольного сечения как функция безразмерной ширины z и высоты y для $\text{Kn} = 0.05$, $P = 1.5$

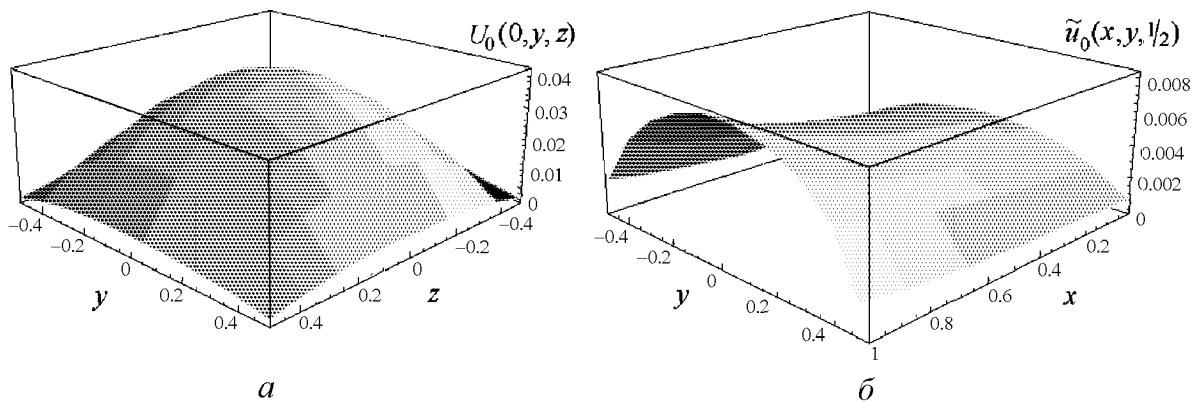


Рис. 2. Профиль безразмерной величины U_0 как функция безразмерной ширины z и высоты y (а) и профиль безразмерной скорости на плоскости стенки как функция безразмерной высоты y и длины x (б) для $\text{Kn} = 0.05$, $P = 1.5$

где Kn' — значение на выходе из канала. Тогда аксиальная компонента скорости запишется следующим образом:

$$\tilde{u}_0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\varepsilon \text{Re}}{M^2 \gamma} \frac{d\tilde{p}_0(\tilde{x})}{d\tilde{x}} U_0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad (2)$$

$$q_n \operatorname{tg}(q_n/2) = \sqrt{\tilde{x}(1-P^2) + P^2} / \text{Kn}',$$

$$U_0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \sin(q_n/2)}{\frac{1}{2} + \frac{\text{Kn}' \sin^2(q_n/2)}{\sqrt{\tilde{x}(1-P^2) + P^2}}} \frac{\cos(q_n \tilde{y})}{q_n^3} \times \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(q_n \tilde{z})}{\operatorname{ch}(q_n \kappa/2) + \frac{q_n \text{Kn}' \operatorname{sh}(q_n \kappa/2)}{\sqrt{\tilde{x}(1-P^2) + P^2}}} \right).$$

Профиль безразмерной скорости потока $\tilde{u}_0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, однозначно заданный величиной падения давления $P = 1.5$ в канале квадратного сечения с $\text{Kn} = 0.05$, приведен на рис. 1: на выходе из канала, $\tilde{z} = 1$ (а), и входе в канал (б). Анализ выражений (2) показывает, что при большом падении давления P уменьшается вклад эффекта

скольжения на входе и вдоль всего канала, кроме окрестности выхода.

Численная оценка аксиальной компоненты скорости позволяет сделать заключение, что вклад молекулярных эффектов в изменение скорости имеет тот же знак, что и вклад сжимаемости. Профиль величины U_0 на входе (определяющей влияние молекулярных эффектов) для $\text{Kn} = 0.05$, $P = 1.5$ представлен на рис. 2, а. Возрастание проскальзывания потока при движении к выходу гораздо больше у стенки, чем в середине потока: скорость на выходе в два раза превышает скорость на входе в углу, на треть превышает ее значение на середине стенки и только на несколько процентов у центральной линии потока. Изучение профиля полной скорости $\tilde{u}_0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ для $\text{Kn} = 0.05$, $P = 1.5$ в плоскостях $y = \text{const}$ или $z = \text{const}$ показывает, что за счет сжимаемости поток ускоряется при движении вдоль канала (см. рис. 2, б). При этом за счет проскальзывания ускорение у стенки больше, чем в центре потока. Однако абсолютное значение скорости в углу на два порядка меньше, чем у центральной линии. Анализ движения потока при высоком давлении показывает, что чем больше падение давления, тем более плоским становится распределение скорости

вдоль канала, а ускорение возникает только вблизи выхода. Большое падение давления эффективно снижает роль скольжения потока вдоль канала, за исключением только его конца. Поток массы в канале для заданных значений давления на входе и выходе может быть вычислен путем умножения скорости на плотность и интегрирования по сечению канала. Оценим, например, результат на выходе из канала при $\tilde{x} = 1$. Это приводит к следующему размерному выражению для потока массы:

$$\dot{m} = \frac{h^4 \bar{p}^2 (P^2 - 1)}{\mu L RT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1/\sin^2 s_n + 2 Kn' s_n^5} \times \frac{1}{s_n^5} \times \left(s_n \varkappa - \frac{1}{\text{cth } s_n \varkappa + 2 s_n Kn'} \right), \quad (3)$$

$$s_n = \text{arctg} \frac{1}{2 Kn' (\pi/2 + \pi n)} + \pi n, \quad P = \frac{p_{in}}{\bar{p}}, \quad \dot{m} = \frac{dm}{dt}.$$

Поток массы зависит от высоты канала в четвертой степени, так же как и в стандартных задачах. Численная оценка потока массы демонстрирует его почти линейную зависимость от Kn' независимо от геометрии сечения канала. Пример для квадратного сечения приведен на рис. 3. Эффект сжимаемости становится ясным при сравнении приведенного решения (3) для \dot{m} с результатом, полученным для несжимаемого потока \dot{m}_{incomp} . Как видно из выражения (3), для \dot{m} характерна квадратичная зависимость от P . Легко показать, что $\dot{m}/\dot{m}_{incomp} = \frac{1}{2}(1 + P)$, т.е. при высоких давлениях наблюдаемый поток массы для сжимаемой среды больше, чем для несжимаемой. Однако это различие становится незначительным при малой величине падения давления, так как в этом случае плотность остается практически постоянной вдоль канала. Вообще говоря, все полученные результаты справедливы при произвольных значениях отношения давлений P , за исключением области вблизи $P = 1$. В самом деле, раскладывая в ряд при $P \rightarrow 1$ выражение $\tilde{p}_0(\tilde{x}) = \sqrt{\tilde{x}(1 - P^2) + P^2} + O(Kn)$,

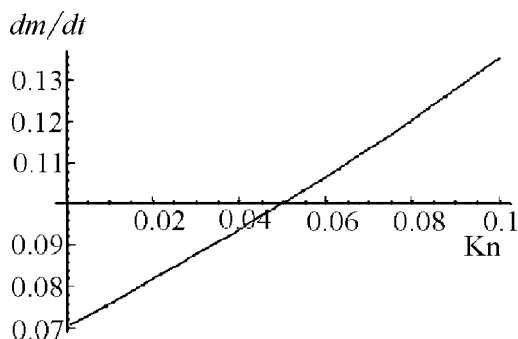


Рис. 3. Безразмерный поток массы (нормированный на $\frac{h^4 \bar{p}^2}{\mu L RT}$) в канале прямоугольного сечения как функция числа Кнудсена Kn' при $P = 1.5$

получаем $\tilde{p}_0(\tilde{x}) \cong 1 + (1 + \tilde{x})(P - 1) + O(Kn)$. Вторым член в этом выражении стремится к нулю при $P \rightarrow 1$, так что вклад членов $O(Kn)$ становится превалирующим по сравнению с вкладом члена, связанного с давлением, и им уже нельзя пренебрегать. И тогда предположение о том, что $\tilde{p}_0(\tilde{x}) \approx \sqrt{\tilde{x}(1 - P^2) + P^2}$, более не является справедливым.

Заключение

Приведенные результаты получены для модели течения сжимаемой среды на основе приближенного решения уравнения НС с учетом скольжения на стенке в первом порядке теории возмущений. Из результатов следует нелинейный характер распределения давления потока массы вследствие сжимаемости и молекулярных эффектов. Сжимаемость увеличивает наблюдаемый поток массы, и это увеличение тем больше, чем больше падение давления P . Молекулярное скольжение приводит к дальнейшему росту расхода массы в единицу времени, более существенному при низких значениях падения давления. Ускорение потока возникает за счет сжимаемости газа. Численные оценки приводят к выводу о том, что вклады молекулярных эффектов и сжимаемости в изменение скорости имеют одинаковый знак. С ростом P относительный вклад молекулярных эффектов в скорость у входа в канал уменьшается. Заметим, что если бы рассматривалась нормальная компонента скорости, можно было бы сделать дополнительные выводы, касающиеся скорости и дрейфа массы от центральной линии к стенке.

Таким образом, проведенное в настоящей работе изучение динамики трехмерных газовых потоков в микроканалах показывает, что влияние сжимаемости и характерного для микромасштабов молекулярного скольжения потока вдоль стенок канала на динамику потока качественно соответствует двумерному случаю. Интересным представляется факт малости абсолютной величины скорости скольжения в углах канала по сравнению с ее значением на стенке. Происходит как бы торможение потока вблизи углов канала, несмотря на все молекулярные эффекты.

Полученные в работе выражения для динамических переменных могут быть использованы для практического расчета скорости, распределения давления и потока массы в прямоугольном канале, а также в треугольном канале без учета молекулярных эффектов.

Литература

1. Edwards R. // Rarefied Gas Dynamics: 10th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics (1976) / Ed. Potter J. N. Y.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1977.

2. *Ho C.-M., Tai Y.-C.* // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1998. **30**. P. 579.
3. *White F.M.* *Viscous Fluid Flow*. N.Y.: McGraw Hill, 1991.
4. *Patterson G.N.* *Molecular Flow of Gases*. N.Y.: John Wiley & Sons Inc., 1956.
5. *Prud'homme R., Chapman T., Bowen J.* // *Appl. Sci. Res.* 1986. **43**. P. 67.
6. *Berg H. van den, Seldam C., Gulik P.* // *J. Fluid Mech.* 1993. **246**. P. 1.
7. *Pong K., Ho C., Liu J., Tai Y.* // *Appl. Microfabrication to Fluid Mechanics: ASME Winter Annual Meetings, Chicago, Nov. 1994*. P. 51.
8. *Harley J., Huang Y., Bau H., Zemel J.N.* // *J. Fluid Mech.* 1995. **284**. P. 257.
9. *Arkilic B., Schmidt M., Breuer K.* // *Application of Microfabrication to Fluid Mechanics: ASME Winter Annual Meetings, Chicago, Nov. 1994*. P. 57.
10. *Beskok A., Karniadakis G.* // *Simulation on heat and momentum transfer in microgeometries: AIAA Paper 93-3269*, 1993.
11. *Pickos E., Breuer E.* *DSMC modeling of micromechanical devices: AIAA Paper 95-2089*, 1995.
12. *Wang B.X., Peng X.F.* // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1994. **37**. Suppl. 1. P. 73.
13. *Adams T.M., Abdel-Khalik S.I., Jeter S.M., Quereshi Z.H.* // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1998. **41**, No. 6-7. P. 851.
14. *Wu P.Y., Little W.A.* // *Cryogenics.* 1983. **24**, No. 8. P. 273.
15. *Peng X.F., Peterson G.P.* // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1996. **39**, No. 12. P. 2599.
16. *Pfahler J., Harley J., Bau H.* // *Symp. Micromechan. Sensors, Actuators and Systems. ASME DSC-32*. P. 49.
17. *Arkilic E.B., Schmidt A., Breuer K.S.* // *J. Microelectromech. Systems.* 1997. **6**, No. 2. P. 167.

Поступила в редакцию
23.06.00