УДК 533.9

ОПТИМАЛЬНАЯ НОРМАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ВЛАСОВА–МАКСВЕЛЛА

Л. В. Бородачев, И. В. Мингалев, О. В. Мингалев

(*кафедра математики*)

E-mail: boroda2000@math.phys.msu.su

Рассматривается эффективная процедура нормализации самосогласованной плазменной модели Власова–Максвелла. Предлагается совокупность нормирующих множителей, не зависящая от методики численного решения исходной интегро-дифференциальной системы уравнений. С позиций минимизации вычислительных затрат показывается ее оптимальность. Обсуждаются вопросы существования и единственности полученного набора нормирующих множителей.

Введение

Как известно, любой анализ интегро-диффренциальной системы уравнений Власова–Максвелла, выполняемый методом компьютерного эксперимента [1], представляет собой большую серию однотипных расчетов, как правило, требующих значительных вычислительных затрат. Хорошо известны и способы минимизации подобных затрат. В частности, на этапе построения численного алгоритма это переход от исходных физических величин к таким новым переменным, в терминах которых численная модель имела бы простейший вид: возможно большее число коэффициентов исходных уравнений равнялось бы единице, а сами переменные были безразмерны. Первое требование очевидно обусловливает экономию машинных ресурсов в каждом конкретном расчете, второе позволяет снизить (зачастую значительно) общее количество экспериментов, поскольку безразмерное моделирование при выборе соответствующих единиц может отвечать решению целого класса сходных физических задач. Кроме того, подобная нормализация дает возможность, с одной стороны, адекватно сопоставлять результаты расчетов независимо от исходных значений параметров, а с другой — рассматривать различные члены модельных уравнений в одном масштабе, что с очевидностью облегчает оценку их вкладов в общую картину рассматриваемого явления.

Можно выделить два основных подхода к нормализации. В первом (см., в частности, [2])*) нормировка осуществляется на основе пространственно-временных параметров дискретизации исходной математической модели. Во втором система нормирующих множителей строится на базе основных физических параметров модели (см., напр., [3]). Последний способ нам представляется более привлекательным, поскольку лишен привязки к конкретному компьютерному эксперименту. Однако и в первом, и во втором случаях нормировка, как правило, проводится на стадии разработки конкретного вычислительного алгоритма, т. е. с учетом используемого разностного метода решения модели. При этом вопросы о том, оптимальна ли полученная нормировка и может ли ее изменить выбор другого метода решения, вообще не обсуждаются (во всяком случае авторам подобные работы неизвестны).

Вместе с тем все основные методы численного анализа формализма Власова–Максвелла по сути сводятся к его конечно-разностной аппроксимации на сетках: эйлеровой в реальном или фурье-пространстве для полевых уравнений [2–4], эйлеровой в фазовом пространстве для уравнения Власова в методах конечных разностей и преобразований [4–6] и лагранжевой в методах водяного мешка и макрочастиц [2, 3, 5]. Следовательно, конкретные схемы не должны содержать новых размерных величин по сравнению с аналитической моделью. Таким образом, ее оптимальная нормализация может быть получена на базе исходной интегро-дифференциальной системы уравнений независимо от используемой численной методики решения и в этом смысле должна быть единственной. Построение такой оптимально нормализованной модели Власова–Максвелла и составляет предмет данной работы.

1. Необходимые условия нормализации

Система уравнений Власова–Максвелла для самосогласованной плазмы, состоящей из K сортов заряженных частиц, вместе с уравнениями, определяющими электрический и магнитный потенциалы, в гауссовой системе единиц имеет вид

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{x}}\right) + \frac{q_a}{m_a}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}], \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}}\right) = 0,$$

$$n_a(\mathbf{x},t) = \int\limits_{R^3} f_a(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\,d\mathbf{v}, \quad \rho(\mathbf{x},t) = \sum_{a=1}^{K} q_a n_a,$$

$$\mathbf{j}_a(\mathbf{x},t) = q_a \int\limits_{R^3} \mathbf{v} f_a(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\,d\mathbf{v}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{x},t) = \sum_{a=1}^{K} \mathbf{j}_a,$$

*) Авторы ссылаются лишь на фундаментальные работы по численному моделированию плазмы.

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0,\quad \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\operatorname{rot}\mathbf{B}-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A},\quad \mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

Здесь c — скорость света, $\rho(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{j}(\mathbf{x},t)$ — плотности заряда и тока, а через $f_a=f_a(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$, m_a и q_a обозначены соответственно функция распределения, масса и заряд частиц сорта $a=1,\dots,K$.

Для всех входящих в исходную систему физических величин

$$\{t,\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{E},\mathbf{B},\rho,\mathbf{j},\mathbf{j}_a,q_a,m_a,n_a,f_a,\varphi,\mathbf{A}\}\tag{1}$$

введем безразмерные аналоги по формуле

$$F=\widehat{F}F',\tag{2}$$

где $\widehat{F}$ — размерный масштаб (нормирующий множитель) для F, а F' — ее безразмерная величина. При этом масштабы величин q_a, m_a, n_a, f_a и $\mathbf{j}_a$ будем считать не зависящими от сорта частиц.

В результате указанной замены переменных будем иметь:

$$\frac{\partial f_a'}{\partial t'}+\left\{\frac{\widehat{v}\,\widehat{t}}{\widehat{x}}\right\}\left(\mathbf{v}',\frac{\partial f_a'}{\partial\mathbf{x}'}\right)+\left\{\frac{\widehat{q}\,\widehat{t}\,\widehat{E}}{\widehat{v}\,\widehat{m}}\right\}\frac{q_a'}{m_a'}\left(\mathbf{E}',\frac{\partial f_a'}{\partial\mathbf{v}'}\right)+$$
$$+\left\{\frac{\widehat{q}\,\widehat{t}\,\widehat{B}}{c\widehat{m}}\right\}\frac{q_a'}{m_a'}\left([\mathbf{v}'\times\mathbf{B}'],\frac{\partial f_a'}{\partial\mathbf{v}'}\right)=0,$$

$$n_a'(\mathbf{x}',t')=\left\{\frac{\widehat{f}\,\widehat{v}^3}{\widehat{n}}\right\}\int\limits_{R^3}f_a'(t',\mathbf{x}',\mathbf{v}')\,d\mathbf{v}',$$

$$\rho'(\mathbf{x}',t')=\left\{\frac{\widehat{q}\,\widehat{n}}{\widehat{\rho}}\right\}\sum_{a=1}^{K}q_a'n_a',$$

$$\mathbf{j}'_a(\mathbf{x}',t')=\left\{\frac{\widehat{q}\,\widehat{f}\,\widehat{v}^4}{\widehat{j}}\right\}q_a'\int\limits_{R^3}\mathbf{v}'f_a'(t',\mathbf{x}',\mathbf{v}')\,d\mathbf{v}',$$

$$\mathbf{j}'(\mathbf{x}',t')=\sum_{a=1}^{K}\mathbf{j}'_a,$$

$$\operatorname{div}'\mathbf{E}'=\left\{\frac{4\pi\widehat{\rho}\,\widehat{x}}{\widehat{E}}\right\}\rho',\quad \operatorname{rot}'\mathbf{E}'=-\left\{\frac{\widehat{x}\,\widehat{B}}{c\widehat{t}\,\widehat{E}}\right\}\frac{\partial\mathbf{B}'}{\partial t'},$$

$$\operatorname{div}'\mathbf{B}'=0,\quad \frac{\partial\mathbf{E}'}{\partial t'}=\left\{\frac{c\widehat{t}\,\widehat{B}}{\widehat{x}\,\widehat{E}}\right\}\operatorname{rot}'\mathbf{B}'-\left\{\frac{4\pi\widehat{t}\,\widehat{j}}{\widehat{E}}\right\}\mathbf{j}',$$

$$\mathbf{B}'=\left\{\frac{\widehat{A}}{\widehat{x}\,\widehat{B}}\right\}\operatorname{rot}'\mathbf{A}',$$

$$\mathbf{E}'=-\left\{\frac{\widehat{\varphi}}{\widehat{x}\,\widehat{E}}\right\}\nabla'\varphi'-\left\{\frac{\widehat{A}}{c\widehat{t}\,\widehat{E}}\right\}\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t'},$$

где выражения в фигурных скобках являются, как нетрудно проверить, безразмерными коэффициентами.

Потребуем, чтобы все эти коэффициенты были равны единице, т. е. чтобы исходная аналитическая модель приняла нормализованный вид:

$$\frac{\partial f_a'}{\partial t'}+\left(\mathbf{v}',\frac{\partial f_a'}{\partial\mathbf{x}'}\right)+\frac{q_a'}{m_a'}\left(\mathbf{E}'+[\mathbf{v}'\times\mathbf{B}'],\frac{\partial f_a'}{\partial\mathbf{v}'}\right)=0,$$

$$n_a'(\mathbf{x}',t')=\int\limits_{R^3}f_a'(t',\mathbf{x}',\mathbf{v}')\,d\mathbf{v}',\quad \rho'(\mathbf{x}',t')=\sum_{a=1}^{K}q_a'n_a',$$

$$\mathbf{j}'_a(\mathbf{x}',t')=q_a'\int\limits_{R^3}\mathbf{v}'f_a'(t',\mathbf{x}',\mathbf{v}')\,d\mathbf{v}',\quad \mathbf{j}'(\mathbf{x}',t')=\sum_{a=1}^{K}\mathbf{j}'_a,$$

$$\operatorname{div}'\mathbf{E}'=\rho',\quad \operatorname{rot}'\mathbf{E}'=-\frac{\partial\mathbf{B}'}{\partial t'},$$

$$\operatorname{div}'\mathbf{B}'=0,\quad \frac{\partial\mathbf{E}'}{\partial t'}=\operatorname{rot}'\mathbf{B}'-\mathbf{j}',$$

$$\mathbf{B}'=\operatorname{rot}'\mathbf{A}',\quad \mathbf{E}'=-\nabla'\varphi'-\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t'}.$$

Последнее требование означает, что масштабы физических величин в (1) должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\frac{\widehat{v}\,\widehat{t}}{\widehat{x}}=1,\quad \frac{\widehat{q}\,\widehat{t}\,\widehat{E}}{\widehat{v}\widehat{m}}=1,\quad \frac{\widehat{q}\,\widehat{t}\,\widehat{B}}{c\widehat{m}}=1,\tag{3}$$

$$\frac{4\pi\widehat{\rho}\,\widehat{x}}{\widehat{E}}=1,\quad \frac{\widehat{x}\,\widehat{B}}{c\widehat{t}\,\widehat{E}}=1,\quad \frac{c\widehat{t}\,\widehat{B}}{\widehat{x}\,\widehat{E}}=1,\quad \frac{4\pi\widehat{t}\,\widehat{j}}{\widehat{E}}=1,\tag{4}$$

$$\frac{\widehat{A}}{\widehat{x}\,\widehat{B}}=1,\quad \frac{\widehat{\varphi}}{\widehat{x}\,\widehat{E}}=1,\quad \frac{\widehat{A}}{c\widehat{t}\,\widehat{E}}=1,\tag{5}$$

$$\frac{\widehat{f}\,\widehat{v}^3}{\widehat{n}}=1,\quad \frac{\widehat{q}\,\widehat{n}}{\widehat{\rho}}=1,\quad \frac{\widehat{q}\,\widehat{f}\,\widehat{v}^4}{\widehat{j}}=1.\tag{6}$$

Полученная система равенств представляет собой необходимые условия существования оптимальной с позиций минимизации вычислительных затрат совокупности нормирующих множителей для модели Власова–Максвелла.

2. Оптимальный набор нормирующих множителей

Прежде всего отметим, что система (3)–(6), решением которой должен явиться набор нормирующих множителей, формально не замкнута (число выписанных соотношений на единицу меньше числа искомых величин). Это значит, что решение, если оно существует, будет не единственным. Очевидно, что требование единственности обусловливает появление дополнительных, пока неизвестных и, возможно, не формализуемых условий.

Выразим отношения $\widehat{B}/\widehat{E}$ из второго и третьего равенств в (4) и приравняем их. Тогда получим цепочку отношений: $\widehat{B}/\widehat{E}=c\widehat{t}/\widehat{x}=\widehat{x}/c\widehat{t}$, из которых вытекают физически естественные равенства:

$$\widehat{E}=\widehat{B}, \quad \widehat{x}=c\widehat{t}. \tag{7}$$

Сравнив последнее из них с первым равенством в (3), получим

$$\widehat{v}=c. \tag{8}$$

Далее, из равенств (6) с учетом (8) найдем следующие соотношения:

$$\widehat{f}=\frac{\widehat{n}}{c^3}, \quad \widehat{\rho}=\widehat{q}\,\widehat{n}, \quad \widehat{j}=c\widehat{q}\,\widehat{n}. \tag{9}$$

Приравнивая выражения для $\widehat{E}$ из второго равенства в (3) и первого равенства в (4) с учетом (8) и (9), получим

$$\frac{c\widehat{m}}{\widehat{t}\,\widehat{q}}=4\pi\widehat{t}\,\widehat{q}\,\widehat{n},$$

откуда определим масштаб времени:

$$\widehat{t}=\sqrt{\frac{\widehat{m}}{4\pi\widehat{n}\,\widehat{q}^2}}=\frac{1}{\widehat{\omega}}, \tag{10}$$

где $\widehat{\omega}=\sqrt{4\pi\widehat{n}\,\widehat{q}^2/\widehat{m}}$ — размерный масштаб частоты. Подстановка (10) во второе из равенств (7) дает

$$\widehat{x}=\frac{c}{\widehat{\omega}}. \tag{11}$$

Теперь из последнего равенства в (3) (с учетом (7), (8), (10)) будем иметь:

$$\widehat{E}=\widehat{B}=\frac{c\widehat{m}\widehat{\omega}}{\widehat{q}}=\sqrt{4\pi\widehat{m}\widehat{n}c^2}. \tag{12}$$

Наконец, выражая $\widehat{A}$ и $\widehat{\varphi}$ соответственно из первого и второго равенств в (5) и учитывая (11) и (12), получим соотношения

$$\widehat{\varphi}=\widehat{A}=\frac{\widehat{m}c^2}{\widehat{q}}, \tag{13}$$

которые завершают построение требуемой совокупности нормирующих множителей.

Действительно, из условий (3)–(6) с необходимостью вытекают соотношения (8)–(13). Прямая же подстановка показывает, что соотношений (8)–(13) достаточно для удовлетворения всех равенств в (3)–(6). При этом масштабы $\widehat{n}$, $\widehat{q}$ и $\widehat{m}$ остаются свободными величинами, значения которых могут быть выбраны произвольно.

Заметим, что полученный результат вполне корректен как математически, так и физически. Действительно, с одной стороны, число свободных переменных точно соответствует порядку неопределенности исходной системы равенств, если учесть, что последние соотношения в (4) и (5) оказались невостребованными. С другой стороны, в физике, как известно, именно время, длина (или скорость), масса и заряд являются величинами, для которых единицы вводятся произвольным образом (см., напр., [7]). Естественно, адекватный подход должен быть выдержан и при построении системы размерных масштабов, что и получено выше (размерный масштаб времени, согласно (10), однозначно определяется размерным масштабом плотности), причем получено автоматически. Последнее, как мы полагаем, доказывает корректность предложенной процедуры нормализации модели Власова–Максвелла.

Теперь очевидно и условие, доставляющее единственность решения системы (3)–(6). В качестве свободных масштабов $\widehat{n}$, $\widehat{q}$, $\widehat{m}$ нужно выбрать соответственно равновесную плотность, заряд и массу частиц любой из компонент модельной плазмы. Тогда размерный масштаб частоты будет соответствовать плазменной частоте этой базовой компоненты, и вся система нормирующих множителей примет законченный вид. Как правило, удобнее всего в виде базовой выбрать именно электронную компоненту, что обычно и делается в реальных численных экспериментах.

Отметим, что в системе единиц СИ изложенный подход приводит к аналогичному результату. При этом соотношения (8) и (9) сохраняют свой вид, а вместо (10)–(13) получаются соотношения

$$\widehat{t}=\frac{1}{\widehat{\omega}}=\sqrt{\frac{\varepsilon_0\widehat{m}}{\widehat{n}\,\widehat{q}^2}}, \quad \widehat{x}=c\widehat{t},$$

$$\widehat{B}=\frac{\widehat{m}\widehat{\omega}}{\widehat{q}}, \quad \widehat{E}=c\widehat{B}, \quad \widehat{A}=\frac{\widehat{m}c}{\widehat{q}}, \quad \widehat{\varphi}=c\widehat{A}.$$

Заключение

Итак, установлено, что любая плазменная модель на основе уравнений Власова–Максвелла имеет оптимально нормализованный вид в том и только в том случае, когда $\widehat{v}=c$, где c — скорость света, и через свободные масштабы $\widehat{n}$, $\widehat{q}$, $\widehat{m}$ выражены все остальные размерные масштабы исходных физических величин модели. Если при этом выбрать в качестве $\widehat{q}$ величину заряда электрона e, в качестве $\widehat{m}$ — массу электрона m_e, а в качестве $\widehat{n}$ взять равновесную плотность электронов n_{0e}, то масштаб частоты $\widehat{\omega}$ будет совпадать с характерной для плазмы ленгмюровской частотой $\widehat{\omega}_{pe}=\sqrt{4\pi n_{0e}e^2/m_e}$. При этом совокупность нормирующих множителей окажется однозначно определенной и замкнутой в том смысле, что размерный масштаб любой производной физической величины, как-то: температуры, плотности импульса и т. д., может быть определен на основе полученного выше набора нормирующих множителей.

Литература

1. *Самарский А.А.* // Вестн. АН СССР. 1979. №5. С. 38.
2. *Хокни Р., Иствуд Дж.* Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987.
3. *Бэдсел Ч., Ленгдон А.* Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989.
4. Вычислительные методы в физике плазмы / Под. ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. М.: Мир, 1974.
5. *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975.
6. *Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П.* Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1993.
7. *Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М.* Курс общей физики. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию
30.11.00

УДК 530.145:517.98

САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ГАМИЛЬТОНИАНА СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В МЕТРИКЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Х. Афантитис, С. В. Каляшин

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Показано, что в пространстве с метрикой Шварцшильда существует самосопряженное продолжение гамильтониана безмассового скалярного поля.

Введение

В классической теории черная дыра (ЧД) определена как объект, поглощающий все материальные тела. Действительно, по теореме Пенроуза [1], горизонт событий образован световыми геодезическими, у которых в будущем нет граничных точек, и каждая из таких образующих никогда в будущем не покинет горизонта.

В квантовом случае понятие траектории (геодезической) отсутствует, поэтому критерий Пенроуза неприменим. При рассмотрении квантовой задачи вывод о существовании ЧД может быть сделан на основе изучения асимптотического поведения решений.

Так, в работах [2–7], посвященных исследованию квантового скалярного поля в пространстве с метрикой Шварцшильда, вид волновых функций указывает на то, что упомянутая задача описывает ЧД. Однако, несмотря на всю убедительность многочисленных доводов, обосновывающих эту точку зрения, остается вопрос: почему в статической системе с действительным лагранжианом возникает эффект ЧД?

По нашему мнению, основной причиной возникновения этого эффекта стало включение в задачу наглядного с классической точки зрения граничного условия для радиальной волновой функции $R(r^*)$:

$$R(r^*) \sim \begin{cases} A\,\mathrm{e}^{-i\omega r^*}, & r^* \to -\infty, \\ \mathrm{e}^{-i\omega r^*} + B\,\mathrm{e}^{i\omega r^*}, & r^* \to \infty, \end{cases} \tag{1}$$

где A — амплитуда волны, которая прошла через статический потенциал, расположенный вне радиуса Шварцшильда, B — амплитуда отраженной от него волны,

$$r^* = r + 2m \ln\left|1 - \frac{r}{2m}\right| \tag{2}$$

— «черепашья» переменная Редже–Уилера. Условие (1) явно запрещает движение частиц из внутренней области пространства Шварцшильда во внешнюю.

Необходимо обратить внимание на то, что радиальное уравнение для поля вне радиуса Шварцшильда топологически эквивалентно одномерному уравнению на оси $(-\infty, \infty)$. Это приводит к двукратному вырождению уровней энергии. Но использование граничного условия (1) фактически убирает половину базиса и тем самым создает иллюзию *несамосопряженности* гамильтониана и существования ЧД. Исследованию возможности построения самосопряженного гамильтониана и посвящена данная статья.

1. Постановка задачи

В сферической системе координат $x^i = \{t, r, \theta, \phi\}$ метрика рассматриваемого пространства задается следующим выражением:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \tfrac{1}{1-2m/r} dr^2 + \\ + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2,$$

где $r = 2m$ — радиус Шварцшильда, $c = G \equiv 1$, $\sqrt{-g} = r^2 \sin\theta$.