РАДИОФИЗИКА

УДК 519.246,524

ОБНАРУЖЕНИЕ СЛАБЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ИМПУЛЬСОВ НА ФОНЕ АНОМАЛЬНО-ЗАСОРЕННОЙ ПОМЕХИ

А. В. Гусев, А. Ю. Кочеткова, В. Н. Руденко

(*ГАИШ*)

E-mail: sunny@sai.msu.ru

Предлагается локально оптимальный алгоритм обнаружения слабых и редких гравитационных импульсов, основанный на рассмотрении аддитивной помехи на выходе резонансных гравитационных антенн как узкополосного аномально-засоренного процесса с гауссовским + лапласовским распределением.

Введение

Чувствительность резонансных криогенных гравитационных антенн (ГА) [1, 2] оказывается недостаточной для обнаружения отдельных гравитационных импульсов (ГИ). В режиме непрерывного мониторинга полезный гравитационный сигнал $s(t)$ на выходе ГА можно рассматривать как некогерентную последовательность слабых и редких ГИ $s_k(t-t_k)$ с быстро флуктуирующими амплитудами и априори неизвестными моментами возникновения t_k. Для оценки этих параметров предлагается [3] использовать комплексную систему обработки информации. При такой обработке неизвестные моменты появления отдельных ГИ определяются по результатам астрофизических наблюдений, полученных с помощью измерительных устройств, основанных на других физических принципах: $t_k = \tau_{ak} + \tau$, $k = \overline{1, N}$, где τ_{ak} — моменты возникновения космических гамма-вспышек (или космических нейтрино), N — число таких событий на интервале наблюдения $(0, T)$. Временной сдвиг τ рассматривается как неизвестный, но не случайный параметр, возможные значения которого ограничены априорным интервалом $(\tau_{\min}, \tau_{\max})$.

Полезный сигнал $s(t) = \sum\limits_{k=1}^{N} s_k(t-t_k)$ принимается на фоне аддитивной узкополосной помехи $n(t) = r(t)\cos[\omega_0 t + \vartheta(t)] = n_g(t) + n_a(t)$, где ω_0 — резонансная частота ГА, $r(t)$ и $\vartheta(t)$ — огибающая и фаза узкополосного процесса $n(t)$, представляющего собой линейную суперпозицию гауссовских $n_g(t)$ и негауссовских $n_a(t)$ стационарных шумов.

Априорная информация о статистических свойствах негауссовских шумов минимальна. При дальнейшем анализе будет использоваться только параметрическая оценка $W_e(e)$ одномерной плотности вероятности квадрата огибающей $e(t) = r^2(t)$. Для обнаружения слабых и редких ГИ $s_k(t-t_k)$ в условиях такой априорной недостаточности в состав локально оптимального приемника (обнаружителя) [4, 5] слабых и редких стохастических ГИ следует ввести [3] дополнительный элемент — безынерционный нелинейный преобразователь (БНП). Характеристика БНП $f[E]$ определяется следующим выражением:

$$f[E] = W_e^{-1}(E)\left[E W_e'(E)\right]', \qquad (1)$$

где $E(t)$ — квадрат огибающей узкополосного процесса на выходе ГА.

Для параметрического оценивания неизвестной плотности вероятности $W_e(e)$ в работе [3] предлагается использовать семейство кривых Пирсона [6]. Конкретный вид распределения определяется коэффициентами Пирсона $\beta_1 = \gamma_1^2$ и $\beta_2 = \gamma_2 + 3$, где γ_1 и γ_2 — коэффициенты асимметрии и эксцесса соответственно.

Для криогенных резонансных ГА основным источником негауссовских шумов оказывается хаотическая импульсная помеха (ХИП), что проявляется в аномальном поведении крыльев эмпирической функции распределения случайного процесса $e(t)$ (при слабом полезном сигнале $e(t) \approx E(t)$). Наличие ХИП позволяет рассматривать шум на выходе ГА как аномально-засоренный гауссовский стационарный случайный процесс [4].

В настоящей работе определена характеристика БНП при аномально-засоренной помехе с гауссовским + лапласовским распределением.

1. Модель аномально-засоренной аддитивной помехи

Плотность вероятности $W_n(n)$ аномально-засоренной помехи на выходе ГА может быть представлена в виде [4]

$$W_n(n) = (1-p)W_g(n) + pW_a(n), \qquad (2)$$

где $W_g(n)$ — гауссовская плотность вероятности с параметрами $(0, \sigma_g^2)$, $0 \leqslant p \leqslant 1$ — вероятность появления аномалии в произвольный момент времени, $W_a(n)$ — плотность вероятности ХИП [4, 7]:

$$W_a(n) = \nu\mu^{1/\nu}\left[\Gamma(1\nu)\right]^{-1}\exp\{-\mu|n|^{\nu}\},$$

$$\sigma_a^2 = \mu^{-2/\nu}\Gamma(3\nu)\Gamma^{-1}(1\nu),$$

где $0,5 \leqslant \nu \leqslant 2$ и μ — характерные параметры, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, σ_a^2 — дисперсия ХИП.

При дальнейшем анализе будем предполагать, что ХИП имеет лапласовское распределение, $\nu = 1$: $W_a(n) = (\mu/2)\exp\{-\mu|n|\}$, $\sigma_a^2 = 2\mu^{-2}$. Выбор лапласовской плотности вероятности можно обосновать, рассматривая помеху $n(t)$ на выходе ГА как случайный процесс, относящийся к хуберовскому классу [4]. Плотность вероятности «наихудшего» в хуберовском классе засорения может быть представлена в виде $W_a^*(n) = (1-p)W_g(n)$ при $|n| \leqslant \Delta$ и $W_a^*(n) = (1-p)W_g(\Delta)\exp\{C_\Delta(\Delta - |n|)\}$, если $|n| \geqslant \Delta$. Параметры $C_\Delta = \left(\Delta/\sigma_1^2\right)$ и Δ определяются условием нормировки плотности вероятности $W_2^*(n)$: $(1-p)\left[2\Phi(\Delta/\sigma_g) - 1 + 2W_g(\Delta)C_\Delta^{-1}\right] = 1$, где $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности. Поведение крыльев «наихудшей» в хуберовском классе аномально-засоренных помех плотности вероятности $W_a^*(n)$ оказывается характерным для лапласовской плотности вероятности.

2. Плотность вероятности огибающей аномально-засоренной помехи

При вычислении плотности вероятности $W_R(R)$ огибающей $R(t)$ будем предполагать, что узкополосный шум $n(t)$ на выходе ГА можно рассматривать как стационарный случайный процесс. Тогда можем записать, что [6, 8] $W_R(R) = R\int\limits_0^\infty Q_n(v)J_0(Rv)v\,dv$, $r \geqslant 0$, где $Q_n(v)$ — характеристическая функция случайного процесса $n(t)$, $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Из этого выражения находим плотность вероятности $W_e(e)$ случайного процесса $e(t)$:

$$W_e(e) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty Q_1(v)J_0(v\sqrt{e})v\,dv. \tag{3}$$

Характеристическая функция $Q_1(v)$ случайного процесса $n(t)$ с гауссовским + лапласовским распределением имеет вид

$$\begin{aligned} Q_1(v) &= \langle\exp\{jvn\}\rangle = \\ &= (1-p)\exp\left\{-\sigma_g^2v^2/2\right\} + \mu^2(\mu^2+v^2)^{-1}, \end{aligned}$$

$\langle\ldots\rangle$ — символическая форма записи оператора статистического усреднения. Подстановка этого выражения в формулу (3) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} W_e(e) = 2^{-1}\Big[&(1-p)\sigma_g^{-2}\exp\left\{-e/(2\sigma_g^2)\right\} + \\ &+ p\mu^2K_0\left(\mu\sqrt{e}\right)\Big], \end{aligned} \tag{4}$$

где $K_m(\cdot)$ — функция Макдональда m-го порядка, $m = 0, 1, \ldots$.

Характеристика $f[E]$ БНП в составе синхронного некогерентного накопителя слабых ГИ определяется выражением (1). При ее вычислении будем учитывать, что $\frac{d}{dz}\left[z^{\pm m}K_m(z)\right] = -z^{\pm m}K_{m\mp1}(z)$. Тогда, принимая во внимание выражение (4), получим: $f[E] = 2\sigma_g^2 f_\varepsilon[\varepsilon]$, $\varepsilon = E/(2\sigma_g^2)$,

$$f_\varepsilon[\varepsilon] = \frac{(1-p)(\varepsilon-1)\exp\{-\varepsilon\} + 2p\gamma^4K_0\left(2\gamma\sqrt{\varepsilon}\right)}{(1-p)\exp\{-\varepsilon\} + 2p\gamma^2K_0\left(2\gamma\sqrt{\varepsilon}\right)}, \tag{5}$$

где $\gamma = \sigma_g/\sigma_a \ll 1$.

Отметим, что интегральная функция распределения $F_\varepsilon(\varepsilon)$ случайной величины ε при отсутствии ГИ определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(\varepsilon) = (1-p)&\left[1 - \exp\{-\varepsilon\}\right] + \\ &+ p\left[1 - (2\gamma\sqrt{\varepsilon})K_0(2\gamma\sqrt{\varepsilon})\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Плотность вероятности $W_n(n)$ (2) аномально-засоренной помехи $n(t)$ с гауссовским + лапласовским распределением зависит от трех параметров: σ_g^2, σ_a^2 и p. Для их оценки в эксперименте воспользуемся следующей методикой. Пусть $m_k\{e\} = (2\sigma_g^2)^k\left\langle\varepsilon^k(t)\right\rangle$ — начальные моменты квадрата огибающей $e(t)$. Тогда, учитывая, что плотность вероятности $W_\varepsilon(\varepsilon)$ случайного процесса $\varepsilon(t)$ записывается в виде

$$W_\varepsilon(\varepsilon) = \frac{dF_\varepsilon(\varepsilon)}{d\varepsilon} = (1-p)\exp\{-\varepsilon\} + 2p\gamma^2K_0\left(2\gamma\sqrt{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \geqslant 0, \tag{7}$$

находим:

$$m_k\{e\} = 2^k k!\left[(1-p)\sigma_g^{2k} + pk!\sigma_a^{2k}\right], \quad k = 1, 2, 3. \tag{8}$$

При известных начальных моментах $m_1\{e\}$, $m_2\{e\}$ и $m_3\{e\}$ соотношения (8) можно рассматривать как систему уравнений, решение которой позволяет определить характерные параметры σ_g^2, σ_a^2 и p. В условиях априорной параметрической недостаточности вместо неизвестных начальных моментов $m_k\{e\}$ используются их выборочные оценки

$$\hat{m}_k\{e\} = \frac{1}{T_0}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} e^k(t)\,dt, \; k = 1, 2, 3, \tag{9}$$

где $(-T_0/2, T_0/2)$ — интервал наблюдения, выбранный для адаптации системы (подобный алгоритм использовался в [5] при бигауссовской помехе). Применение соответствующих математических программ (типа «Matematica» и др.) позволяет найти решение системы уравнений (8) в аналитическом виде (формулы для вычисления неизвестных параметров p, σ_g^2 и σ_a^2 не приводятся из-за их сложности).

3. Основные результаты и выводы

При обнаружении слабых ГИ приходится учитывать, что плотность вероятности аддитивной помехи на выходе ГА априори неизвестна. Параметрический метод преодоления априорной недостаточности при наличии ХИП основан на ее аппроксимации. В классе узкополосных аномально-засоренных стационарных гауссовских процессов такая аппроксимирующая функция определяется выражением (2).

1. Плотность вероятности аномально-засоренной помехи с гауссовским + лапласовским распределением зависит от трех параметров: вероятности появления аномалии $0 \leqslant p \leqslant 1$, дисперсии гауссовской составляющей σ_g^2 и дисперсии аномалии σ_a^2, причем $\sigma_g^2 \ll \sigma_a^2$. При адаптивном приеме эти параметры определяются по выборочным начальным моментам (9).

2. Характеристика БНП в составе синхронного локально-оптимального накопителя слабых и редких ГИ при аддитивной помехе с гауссовским + лапласовским распределением определяется формулой (5). При отсутствии ХИП ($p = 0$) характеристика БНП оказывается линейной: $f_\varepsilon\,[\varepsilon]_{p=0} = \varepsilon - 1$. Наличие ХИП существенно влияет на поведение функции $f_\varepsilon\,[\varepsilon]$. Действительно, учитывая, что функция $K_0(z)$ убывает на бесконечности, как $z^{-1/2}\exp\{-z\}$, получим: $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} f_\varepsilon\,[\varepsilon] = \gamma^2$ и не зависит от вероятности появления аномалии p.

Зависимость $f_\varepsilon\,[\varepsilon]$ для $p = 0; 0.1; 0.15$ и $\gamma = 0.1$ приведена на рис. 1. В области малых значений аргумента ($\varepsilon \leqslant 5$) характеристика БНП действительно близка к линейной. Большие выбросы шума на выходе ГА ($\varepsilon \geqslant 10$) обусловлены преимущественно воздействием на систему ХИП. При лапласовском распределении ХИП характеристика БНП в этой области близка к характеристике идеального ограничителя.

3. Интегральная функция распределения $F_\varepsilon(\varepsilon)$ (6) случайного процесса $\varepsilon(t)$ при аномально-засоренной помехе с гауссовским + лапласовским распределением для тех же параметров p и γ приведена на рис. 2. Наличие ХИП проявляется в медленном возрастании этой функции при больших значениях аргумента ($\varepsilon \geqslant 5$). Плотность вероятности $W_\varepsilon(\varepsilon)$ (7) убывает на бесконечности, как $\varepsilon^{-1/4}\exp\{-2\gamma\sqrt{\varepsilon}\}$. Такое аномальное поведение крыльев (по отношению к гауссовскому распределению, для которого $W_\varepsilon(\varepsilon) \propto \exp\{-\varepsilon\}$) хорошо согласуется с результатами статистического анализа реальных экспериментальных данных.

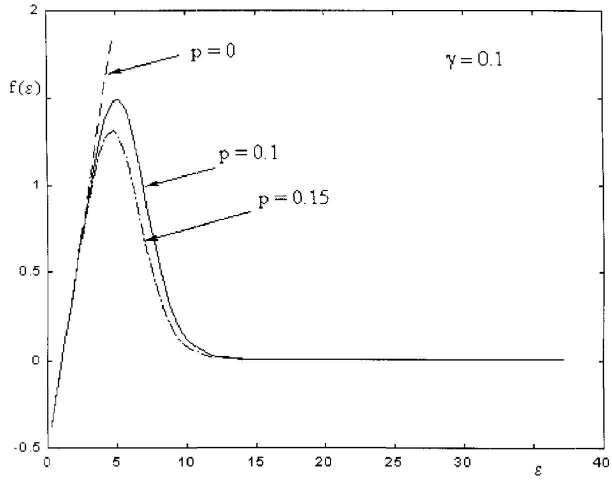

Рис. 1. Характеристика БНП для помехи с гауссовским + лапласовским распределением

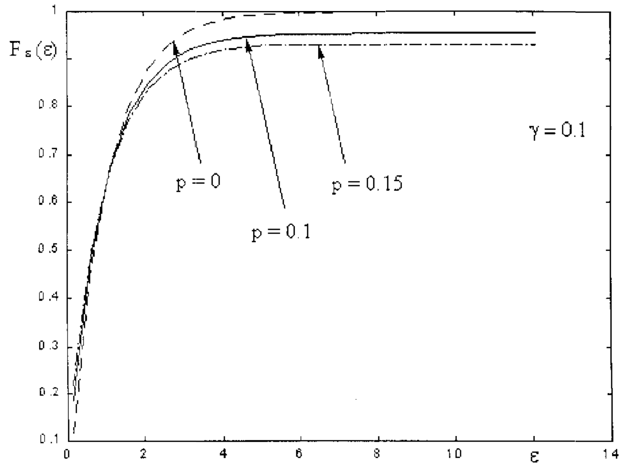

Рис. 2. Интегральная функция распределения аномально-засоренной помехи

Литература

1. *Coccia E., Astone P., Cosmelli C.* et al. // Gravitational Wave Experiment: Proc. of the First Amaldi Conference. Singapore: World Sci., 1995. V. 1. P. 161.
2. *Astone P., Pallotino G.V., Pizzella G.* // Gen. Relat. and Grav. 1998. **30**, No. 1. P. 105.
3. *Гусев А.В., Милюков В.К.* // Радиотехн. и электроника. 2000. **45**, №4. С. 234.
4. *Шелухин О.И.* Негауссовские процессы в радиотехнике. М.: Радио и связь, 1999.
5. *Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А.* и др. Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984.
6. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
7. *Коржик В.И., Финк Л.М., Щелкунов К.Н.* Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений: Справочник. М.: Радио и связь, 1988.
8. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Т. 1. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 06.12.00