АСТРОНОМИЯ

УДК 517.958

НЕПЛОСКИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ТОКОВОЙ ШТАНГОЙ В ГРАВИТАЦИОННОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ ЗЕМЛИ

В. И. Денисов, В. Б. Пинчук

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

E-mail: denisov@srd.sinp.msu.su

Найдено точное решение нелинейных уравнений, описывающих движение космического аппарата по неплоской траектории под действием амперовых сил и сил гравитационного поля.

В качестве двигателя малой тяги для космических аппаратов предложено использовать электродинамическое устройство с токовой штангой [1, 2]. Это устройство представляет собой жесткий линейный проводник с током, замыкание которого осуществляется через ионосферу с помощью специальных концевых плазменных контакторов. В результате взаимодействия тока в проводнике с дипольным магнитным полем Земли возникает сила Ампера, создающая силу тяги для космического аппарата. Величиной и направлением амперовой силы в этом случае легко управлять, изменяя силу тока и ориентацию проводника в пространстве по любому заданному закону.

Векторное уравнение движения космического аппарата в рассматриваемом случае принимает вид

$$M_1\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{GM_1M_2\mathbf{R}}{R^3} + \frac{L}{c}[\mathbf{I}\times\mathbf{B}], \tag{1}$$

где G — постоянная тяготения, M_1 — масса космического аппарата, M_2 — масса Земли, L — длина проводника с током, $\mathbf{I}$ — вектор тока в проводнике, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор космического аппарата относительно центра Земли.

Так как магнитное поле Земли с большой точностью является дипольным, то $\mathbf{B} = [3\mathbf{R}(\mathbf{mR}) - R^2\mathbf{m}]/R^5$, где $\mathbf{m}$ — вектор магнитного дипольного момента.

Как показали оценки [2], предложенное устройство является перспективным средством для осуществления различных маневров легких космических аппаратов на низких околоземных орбитах. Поэтому возникает задача получения и исследования тех частных случаев, в которых уравнение движения космического аппарата (1) под действием силы Ампера имеет точное решение. Эти решения позволяют составить общее представление о характере изменений траектории полета, вносимых действием силы Ампера. Кроме того, они имеют и прикладное значение, так как при разработке и отладке программ численного интегрирования уравнений движения космического аппарата дают возможность исследовать вопросы устойчивости и сходимости выбранного алгоритма.

Рассмотрим частный случай управления токовой штангой, который позволяет получить точное решение уравнения (1), описывающее движение космического аппарата по неплоской траектории. Для этого запишем уравнение (1) в сферической системе координат. Полагая, что вектор магнитного дипольного момента Земли направлен против оси z, и вводя обозначение $k = |\mathbf{m}|L/(M_1c)$, получим

$$\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\varphi}^2\sin^2\theta = -\frac{GM_2}{R^2} + \frac{kI_\varphi}{R^3}\sin\theta, \tag{2}$$

$$R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} - R\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = -\frac{2kI_\varphi}{R^3}\cos\theta,$$

$$\frac{1}{R\sin\theta}[R^2\dot{\varphi}\sin^2\theta]\dot{=} -\frac{k(I_r\sin\theta - 2I_\theta\cos\theta)}{R^3}.$$

В общем случае, при произвольном законе управления вектором тока $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\varphi, \theta)$, решение этой системы нелинейных дифференциальных уравнений неизвестно. Однако при выборе некоторых частных законов управления током можно найти точные решения этой системы уравнений.

Пусть $I_r = I_\theta = 0$. Тогда из последнего уравнения системы (2) следует

$$\dot{\varphi} = \frac{C_0}{R^2\sin^2\theta}, \tag{3}$$

где C_0 — постоянная интегрирования.

Умножая уравнение (1) скалярно на вектор скорости $\mathbf{v}$, получим

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{v^2}{2} - \frac{GM_2}{R}\right] = \frac{kI_\varphi}{R^3}[\dot{R}\sin\theta - 2R\dot{\theta}\cos\theta].$$

Выбирая $I_\varphi = I_0\sin^3\theta$, можно добиться того, что правая часть этого равенства будет представлять собой полную производную по времени. В результате будем иметь:

$$\dot{R}^2+R^2\dot{\theta}^2+R^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\frac{kI_0}{R^2}\sin^4\theta-\frac{2GM_2}{R}=C_2. \quad (4)$$

В этом случае из второго уравнения системы (2) получим

$$R^4\dot{\theta}^2+\frac{C_0^2}{\sin^2\theta}+kI_0\sin^4\theta=C_1. \quad (5)$$

Комбинируя уравнения (3) и (4), выразим φ в виде функции от θ:

$$\varphi=\varphi_0\pm C_0\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sin\theta\sqrt{C_1\sin^2\theta-C_0^2-kI_0\sin^6\theta}}. \quad (6)$$

Этот интеграл выражается через эллиптические функции.

Используя (3) и (5), уравнение (4) приведем к известной в небесной механике [3] форме:

$$\dot{R}^2+\frac{C_1}{R^2}-\frac{2GM_2}{R}=C_2.$$

Запишем его решение в параметрическом виде для случая финитного движения ($C_2<0$):

$$R=R_0[1-\varepsilon\cos\xi],\quad t=T_0[\xi-\varepsilon\sin\xi], \quad (7)$$

где введены обозначения $\varepsilon^2=1+C_1C_2/(GM_2)^2<1$, $R_0=-GM_2/C_2$, $T_0^2=R_0^3/(GM_2)$ и условия при $t=0$ выбраны в перицентре траектории.

Переходя в уравнении (5) от производной по времени к производной по параметру ξ и используя выражения (7), найдем связь параметра ξ с углом θ:

$$\xi=2\,\mathrm{arctg}\left\{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\times\right.$$
$$\left.\times\,\mathrm{tg}\left[\frac{R_0^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2T_0}\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta\sin\theta}{\sqrt{C_1\sin^2\theta-C_0^2-kI_0\sin^6\theta}}\right]\right\}. \quad (8)$$

Соотношения (6)–(8) дают уравнение траектории и определяют закон движения космического аппарата по этой траектории. Вычисление кручения кривой $\varkappa=(\mathbf{R}'[\mathbf{R}''\mathbf{R}'''])/[\mathbf{R}'\mathbf{R}'']^2$, проведенное с использованием компьютерной системы Reduce, показало, что в рассматриваемом случае $\varkappa\neq 0$. Поэтому найденное нами точное решение уравнения (1) описывает неплоскую траекторию движения космического аппарата с токовой штангой в гравитационном и магнитном полях Земли.

Интересным частным случаем неплоского движения космического аппарата под действием амперовой силы в гравитационном поле Земли является движение по траектории, лежащей на поверхности конуса $\theta=\theta_0=\mathrm{const}$, вершина которого находится в центре Земли. Действительно, как следует из уравнений (2)–(4), если в начальный момент времени $t=0$ поместить космический аппарат в точку с координатами $R=R_0$, $\theta=\theta_0$, $\varphi=\varphi_0$ и сообщить ему начальную скорость $\dot{R}(0)=\dot{\theta}(0)=0$, $\dot{\varphi}(0)=C_0/(R_0^2\sin^2\theta_0)$, то при выполнении условия $kI_\varphi=C_0^2/(2\sin^3\theta_0)$ его закон движения примет вид

$$\theta=\theta_0,$$

$$\varphi=\varphi_0+\frac{2C_0T_0}{R_0^2\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin^2\theta_0}\,\mathrm{arctg}\left\{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\xi}{2}\right\},$$

$R=R(\xi)$ и $t=t(\xi)$ даются выражениями (7), а $C_1=3C_0^2/(2\sin^2\theta_0)$.

Такое движение представляет определенный интерес, так как совершается только над одним полушарием и космический аппарат не пересекает при этом плоскость экватора. Таким образом, действие силы Ампера на космический аппарат с токовой штангой существенно изменяет вид его траектории в гравитационном поле Земли.

Литература

1. *Денисов В.И., Пинчук В.Б.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 4. С. 69 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 4. P. 85).
2. *Денисов В.И., Денисова И.П., Пинчук В.Б.* // ДАН. 2000. **374**, № 1. С. 10.
3. *Петкевич В.В.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию
09.02.01