

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.01

**О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В СИЛЬНЫХ  
ВНЕШНИХ ПОЛЯХ В 1 + 1 ИЗМЕРЕНИЯХ****О. Ф. Дорофеев, В. Р. Халилов***(кафедра общей физики и молекулярной электроники;  
кафедра теоретической физики)*

E-mail: khalilov@thc.phys.msu.su

**Изучено влияние внешнего сверхсильного магнитного поля на спектр энергий электрона в сильном кулоновском поле и величину критического заряда ядра. Проблема сведена к решению задачи в ограниченном кулоновском поле в 1 + 1 измерениях. Показано, что уравнение Дирака в 1 + 1 измерениях во внешнем скалярном кулоновском поле имеет невырожденное зарядово-самосопряженное решение с нулевой энергией, вследствие чего вакуум модели должен приобретать фермионный заряд  $\pm 1/2$ .**

В сверхсильном магнитном поле  $B > B_{cr} \equiv m^2/|e|$  электрон в перпендикулярной полю плоскости локализован в области с линейным размером порядка  $a = \sqrt{2/|eB|}$ , что меньше комптоновской длины волны электрона [1]. «Вымораживание» двух степеней свободы позволяет свести некоторые задачи КЭД<sub>3+1</sub> к задачам КЭД<sub>1+1</sub>.

Мы найдем точные решения и спектр энергий уравнения Дирака во внешнем поле кулоновского типа  $U(\mathbf{x}) = -q/(|\mathbf{x}| + a)$  в 1+1 измерениях. Нахождение спектра энергий электрона во внешнем поле, описываемом векторным потенциалом

$$A^0(\mathbf{x}, a) = -\frac{Ze_0}{|\mathbf{x}| + a}, \quad A^1(\mathbf{x}, a) = 0, \quad a > 0, \quad (1)$$

эквивалентно решению задачи о рождении электрон-позитронных пар из вакуума кулоновским полем (см. [2–4]) в сверхсильном магнитном поле в КЭД<sub>3+1</sub> (в рамках КЭД<sub>3+1</sub> эта задача была решена И.М. Терновым [1]\*). Если дираковская частица взаимодействует с внешним скалярным полем  $U(\mathbf{x}) = -q/|\mathbf{x}|$  в 1 + 1 измерениях, то в модели существуют фермионные состояния с нулевой энергией [5] и полуцелым фермионным числом  $\pm 1/2$ . Теоретически это явление впервые было обнаружено в симметричной относительно операции зарядового сопряжения квантовой теории размерности 1 + 1, которая описывает безмассовое дираковское поле, взаимодействующее с внешним топологическим солитонным полем («кинком») [6].

\* И.М. Тернов внес решающий вклад в развитие метода точных решений уравнений релятивистской квантовой механики во внешних полях, что позволило адекватно интерпретировать целый ряд новых явлений квантовой механики.

Эта и следующие две статьи (В.В. Терновского, А.М. Хапаева и А.И. Студеникина) посвящаются памяти профессора И.М. Тернова в связи с 80-летием со дня его рождения (11 ноября 1921 г.).

В КЭД<sub>3+1</sub> задача для спектра энергий электрона в кулоновском поле ядра с  $Ze^2 \geq 1$  имеет физический смысл, только если ядро, создающее кулоновский потенциал, не точечное [2], т.е. рассматривается потенциал, обрезанный на расстоянии  $R$ . В таком потенциале с ростом  $Z$  в области  $Z > 137$  уровни энергии электрона становятся отрицательными и опускаются до границы нижнего континуума  $-m$ . В поле точечного ядра и сверхсильном магнитном поле потенциал ядра обрезается в направлении магнитного поля на расстояниях  $\sim a$  с  $a = \sqrt{2/|eB|}$ , что с учетом замечания о вымораживании степеней свободы электрона и позволяет свести задачу о движении электрона во внешних магнитном и кулоновском полях в 3 + 1 измерениях к задаче об электроне в поле (1) в 1+1 измерениях.

В 1+1 измерениях имеются только две  $\gamma$ -матрицы Дирака. При решении уравнения Дирака в поле, описываемом векторным потенциалом (1), удобно использовать представление

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1 \quad (2)$$

(эквивалентно для матриц  $\beta, \alpha_1$ :  $\beta = \sigma_3, \alpha_1 = -\sigma_2$ ). Гамильтониан уравнения Дирака в поле (1) (магнитное поле в 3 + 1 измерениях направлено по  $\mathbf{x}$ ) имеет вид

$$H_D(Z) = \alpha_1 P_1 + \beta m + eA^0 \equiv i\sigma_2 \partial_x + \sigma_3 m + eA^0. \quad (3)$$

Решение уравнения Дирака с гамильтонианом (3) во внешнем поле (1) ищем в виде

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \exp(-iEt)\Psi(\mathbf{x}), \quad (4)$$

причем

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \quad (5)$$

— двухкомпонентная функция (спинор).

В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dx} - \left( E + m + \frac{Z\alpha}{|x|+a} \right) \psi_2 &= 0, \\ \frac{d\psi_2}{dx} + \left( E - m + \frac{Z\alpha}{|x|+a} \right) \psi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решения ищем отдельно в областях  $x > 0$  и  $x < 0$ .

Введем обозначения  $b_+ = \sqrt{m+E}$ ,  $b_- = \sqrt{m-E}$ ,  $\lambda = b_+b_- \equiv \sqrt{m^2-E^2}$  и перейдем к переменной  $z = 2\lambda(|x|+a)$ . Решение системы (6) в области  $x > 0$ , убывающие при  $x \rightarrow \infty$ , выражаются через функции Уиттекера [7]

$$W_{\beta-1/2, i\rho}(z)/\sqrt{z}, W_{\beta+1/2, i\rho}(z)/\sqrt{z}$$

с  $\beta = EZ\alpha/\lambda$ ,  $\rho = Z\alpha$ :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (AW_{\beta-1/2, i\rho}(z) + BW_{\beta+1/2, i\rho}(z))/b_-\sqrt{z}, \\ \psi_2 &= -(AW_{\beta-1/2, i\rho}(z) - BW_{\beta+1/2, i\rho}(z))/b_+\sqrt{z}, \end{aligned} \quad (7)$$

а связь между постоянными  $A$  и  $B$  определяется соотношением  $A\lambda = BZ\alpha m$ . Волновые функции в области  $-\infty < x < 0$  можно получить аналогично. Решения можно классифицировать по четности: 1) четные  $\psi_1$ , нечетные  $\psi_2$ ; 2) четные  $\psi_2$ , нечетные  $\psi_1$ .

Уравнения для определения спектра энергий фермиона в поле (1), очевидно, можно получить из условий  $\psi_2(0) = 0$  для случая 1 и  $\psi_1(0) = 0$  для случая 2. Трансцендентное уравнение, неявно определяющее спектр энергий фермиона с учетом конечных размеров ядра, имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \ln(2\lambda a) + \arg \Gamma(-\beta + i\rho) - (1/2) \arctg(\rho/\beta) - \\ - \arg \Gamma(2i\rho) = \pi(n - 1/2), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $n$  — целое число, нумерующее уровни энергии. Низшему уровню энергии соответствует значение  $n = 0$ . Критический заряд существенно зависит от параметра  $a$ . Так, решив уравнение (8) численно для  $am = 0.1$  ( $B \sim 10^2 B_{\text{cr}}$ ), мы получили  $Z_{\text{cr}} \approx 93$ . С уменьшением  $a$  (т.е. с увеличением  $B$ )  $Z_{\text{cr}}$  также уменьшается, однако минимальное значение параметра  $a$ , разумеется, ограничено величиной радиуса ядра. Состояние электрона с  $E = -m$  является связанным, т.е. электрон на границе нижнего континуума остается локализованным в пространстве.

Спектры энергий фермионов и антифермионов оказываются симметричными, если массивные фермионы взаимодействуют с внешним скалярным по-

лем кулоновского типа  $U(x) = -q/(|x|+a)$ . Здесь параметр  $a$ , хотя и является параметром обрезания, но не имеет смысла «магнитной длины». Уравнение Дирака в таком поле можно получить из системы (6), если изменить знак перед последним членом второго уравнения и заменить  $Z\alpha$  на  $q$ , однако лучше использовать представление

$$\gamma^0 = \beta = \sigma_1, \quad \gamma^1 = i\sigma_3, \quad \alpha_1 = \sigma_2. \quad (9)$$

В этом представлении стационарное уравнение Дирака во внешнем скалярном поле  $U(x)$  приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dx} + \left( m - \frac{q}{|x|+a} \right) \psi_1 &= E\psi_2, \\ -\frac{d\psi_2}{dx} + \left( m - \frac{q}{|x|+a} \right) \psi_2 &= E\psi_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (10) приводятся к паре одномерных уравнений Шрёдингера для функций  $\psi_1$  и  $\psi_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi_1}{dz^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{qm}{\lambda z} + \frac{q(1-q)}{z^2} \right) \psi_1 &= 0, \\ \frac{d^2\psi_2}{dz^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{qm}{\lambda z} - \frac{q(1+q)}{z^2} \right) \psi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $z = 2\lambda(|x|+a)$ .

Решения (11) в области  $x > 0$ :

$$\psi_1(x) = AW_{g, q-1/2}(z), \quad \psi_2(x) = BW_{g, q+1/2}(z) \quad (12)$$

с  $g = qm/\lambda$ . Связь между постоянными  $A$  и  $B$  найдем, подставляя (12) в (10):  $A(m-\lambda) = BE$ . Волновые функции в области  $-\infty < x < 0$  нетрудно построить, заметив, что уравнения (10) переходят друг в друга при преобразованиях:  $x \rightarrow -x$ ,  $\psi_1(x) \rightarrow \psi_2(-x)$ ,  $\psi_2(x) \rightarrow -\psi_1(-x)$ ,  $E \rightarrow -E$  или  $x \rightarrow -x$ ,  $\psi_1(x) \rightarrow -\psi_2(-x)$ ,  $\psi_2(x) \rightarrow \psi_1(-x)$ ,  $E \rightarrow -E$ .

Интерес представляет случай  $a = 0$ . Уравнения для определения спектра энергий фермиона можно получить из условий  $\psi_2(0) = 0$  или  $\psi_1(0) = 0$ , что в пределе  $a \rightarrow 0$  приводит к уравнению

$$q - \frac{qm}{\lambda} = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Дискретный спектр энергий фермиона во внешнем скалярном поле  $U(x) = -q/|x|$  имеет вид

$$E_n^2 = m^2 \left[ 1 - \frac{q^2}{(q+n)^2} \right] \equiv m^2 \frac{2qn+n^2}{(q+n)^2}, \quad (14)$$

а соответствующее решение является изолированным. Энергия основного уровня ( $n = 0$ ) равна нулю как для частицы, так и для античастицы.

Для решения с нулевой энергией коэффициент  $B = 0$  и функция (5) принимает вид (при положительных  $x$ ):

$$\Psi_0(x) = W_{q,q-1/2}(2mx) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Решение (15) описывает изолированное зарядово-самосопряженное состояние. Действительно, в (1+1) измерениях при представлении (9) в качестве матрицы зарядового сопряжения (в области  $x > 0$ ) можно использовать  $C = \sigma_3$ . В частности, для решения с нулевой энергией (15) легко проверить, что  $\sigma_3 \Psi_0 = \Psi_0$ .

Вторично-квантованное фермионное поле удобно охарактеризовать фермионным зарядом. Для определения оператора фермионного заряда  $Q$  вводится уровень Ферми  $E_F$ , разделяющий занятые и незанятые фермионные состояния (уровни, относящиеся к отрицательным энергиям, предполагаются заполненными), и проводится разложение операторов квантованного поля Дирака по операторам рождения и уничтожения в схеме вторичного квантования.

Если уровень энергии с  $n = 0$  при  $Z < Z_{cr}$  заполнен, то уровень Ферми  $E_F$  лежит выше основного электронного уровня. Раскладывая оператор поля Дирака по операторам рождения и уничтожения с использованием полного набора решений уравнения Дирака (3) с  $Z = Z_{cr}$ , получаем

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(t, x) = & \sum_{E_n^+ > 0} a_n \Psi_n(x) \exp(-iE_n^+ t) + \\ & + b_0^+ \Psi_{-m}(x) \exp(imt) + \\ & + \sum_{E_n^- < -m} b_n^+ \Psi_n(x) \exp(-iE_n^- t). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь через  $\Psi_{-m}(x)$  обозначена функция связанного состояния электрона с энергией  $E = -m$  при

$Z = Z_{cr}$ . Заметим, что первая сумма не содержит оператора  $a_0$ .

Учитывая ортонормированность решений уравнения Дирака (3), нетрудно привести оператор «заряда» поля фермионов  $Q = (1/2) \int [\Psi^\dagger(t, x), \Psi(t, x)] dx$  к виду  $Q = 1 + \sum_{n \neq 0} (a_n^+ a_n - b_n^+ b_n)$ . Вакуумное состо-

яние  $K\hat{E}D_{1+1}$ , определяемое как  $a_n|0\rangle = b_n|0\rangle = 0$ , очевидно, обладает фермионным зарядом (числом) 1 как при  $Z < Z_{cr}$ , так и при  $Z > Z_{cr}$ .

При разложении операторов квантованного поля Дирака  $\hat{\Psi}(t, x)$  по операторам рождения и уничтожения в задаче во внешнем скалярном поле следует учесть симметричность спектра энергий для частиц и античастиц и наличие изолированного зарядово-самосопряженного состояния с нулевой энергией. Тогда нетрудно показать, что вакуумное состояние этой модели обладает фермионным зарядом  $Q = 1/2$  или  $-1/2$  в зависимости от того, занято или не занято состояние с  $E = m$  при  $q = 0$ . При переходе от  $q = 0$  к  $q \neq 0$  вакуум модели приобретает заряд  $Q = -1/2$ , если уровень энергии с  $E = m$  при  $q = 0$  не был заполнен, и  $Q = 1/2$ , если этот уровень заполнен [5].

#### Литература

1. Тернов И.М., Халилов В.Р. // ЖЭТФ. 1981. **57**. С. 654.
2. Poteranchuk I., Smorodinsky Ya. // J. Phys. USSR. 1945. **9**. P. 97.
3. Герштейн С.С., Зельдович Я.Б. // ЖЭТФ. 1969. **57**. С. 654.
4. Зельдович Я.Б., Попов В.С. // УФН. 1971. **105**. С. 403.
5. Ho C.L., Khalilov V.R. // Phys. Rev. 2000. **D63**. P. 027701.
6. Jackiw R., Rebbi C. // Phys. Rev. 1976. **D13**. P. 3398.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1963.

Поступила в редакцию  
05.03.01

УДК 538.3

## МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

В. В. Терновский, А. М. Хапаев

(кафедра математики)

E-mail: ternov@hotmail.com

**Развивается теория индуцированного излучения, основы которой были заложены в работах И.М. Тернова. Построено аналитическое решение задачи о вынужденном излучении ансамбля заряженных частиц, взаимодействующих с переменными электромагнитными полями, которые локализованы в области, представляющей собой модель открытого резонатора.**

Возможность реализации генераторов индуцированного синхротронного излучения электронов, движущихся в макроскопических электромагнитных полях (они получили название лазеров на

свободных электронах), впервые была доказана И.М. Терновым на основе квантовой теории синхротронного излучения [1].

Однако эффект индуцированного излучения по