УДК 517.958 : 519.632.4

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ФИЗИКИ ЗАМАГНИЧЕННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ ВО ВНУТРЕННЕЙ ОБЛАСТИ

А. О. Чикилев, П. А. Крутицкий

(*кафедра математики*)

E-mail: chikilev@afrodita.phys.msu.su

Рассмотрена смешанная задача для гармонических функций во внутренней многосвязной области. На некоторых кривых границы задано условие Дирихле, на остальных — условие с косой производной. Для нахождения решения получено однозначно разрешимое интегральное уравнение Фредгольма второго рода. В результате доказано существование единственного решения задачи в пространстве непрерывных функций.

1. Постановка задачи. Теорема единственности

Пусть $D^{\rm int}$ — открытая связная внутренняя область на плоскости $x=(x_1,x_2)\in R^2$. Граница области $D^{\rm int}$ состоит из простых гладких замкнутых кривых $\Gamma_1^1,\ldots,\Gamma_{N_1}^1$; $\Gamma_1^2,\ldots,\Gamma_{N_2}^2$, которые не имеют общих точек, где $N_1\geqslant 1$ и $N_2\geqslant 0$. Определим: $\Gamma^1=\bigcup\limits_{n=1}^{N_1}\Gamma_n^1$, $\Gamma^2=\bigcup\limits_{n=1}^{N_2}\Gamma_n^2$ и $\Gamma=\Gamma^1\cup\Gamma^2$. Через Ξ обозначим ту кривую контура Γ, которая охватывает все остальные. Таким образом, при некотором m выполнено равенство: либо $\Xi=\Gamma_m^1\subset\Gamma^1$, либо $\Xi=\Gamma_m^2\subset\Gamma^2$. Пусть $\mathbf{n}_x$ — нормаль к Γ в точке $x\in\Gamma$, направленная в область $D^{\rm int}$, а $\boldsymbol{\tau}_x$ — касательная к Γ тоже в точке x. Считаем, что $\boldsymbol{\tau}_x$ указывает положительное направление обхода области $D^{\rm int}$ по Γ, оставляющее $D^{\rm int}$ справа. Предполагаем, что Γ^1 состоит из ляпуновских кривых, т. е. $\Gamma^1\in C^{1,\lambda}$ для некоторого $\lambda\in(0,1]$, а $\Gamma^2\in C^{2,0}$.

Рассмотрим полупроводниковую пленку, занимающую область $D^{\rm int}$ на плоскости и находящуюся в постоянном однородном магнитном поле. Пусть на части ее границы (Γ^1) задан электрический потенциал, а на другой (Γ^2) — нормальная компонента плотности тока [1]. Электрический потенциал в пленке — решение следующей задачи для уравнения Лапласа.

Внутренняя задача $\mathbf{S}^{\rm int}$. Найти гармоническую в области $D^{\rm int}$ функцию $u(x)$, непрерывную в замыкании $\overline{D^{\rm int}}$, по граничным условиям

$$u(x)|_{\Gamma^1}=f_1(x), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}_x}+\beta\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\tau}_x}\right|_{\Gamma^2}=f_2(x),\quad \beta=\mathrm{const}. \tag{2}$$

В граничном условии (2) требуется существование правильной косой производной [1], т. е. существование на Γ^2 равномерного по $x\in\Gamma^2$ предела: $\lim\limits_{d\to+0}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x}+\beta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}_x}\right)u(\mathbf{x}+d\mathbf{n}_x)=f_2(x)$. Во внешней многосвязной области такая задача изучена в работе [7] при условии ограниченности решения на бесконечности. Если $N_2=0$, то $S^{\rm int}$ — внутренняя задача Дирихле, изучавшаяся ранее [2–5]. Внутренняя задача с косой производной ($N_1=0$) рассмотрена в работах [1, 6] и в задаче $S^{\rm int}$ исключена из рассмотрения. Так же как в [7], с помощью энергетических тождеств можно доказать теорему единственности.

Т е о р е м а 1. *Задача $S^{\rm int}$ имеет не более чем одно решение.*

2. Интегральное уравнение и теорема существования

Пусть далее: $f_1(x)\in C^0(\Gamma^1)$, $f_2(x)\in C^0(\Gamma^2)$. Введем обозначение: D_n^k — внутренняя открытая область, ограниченная кривой Γ_n^k ($n=1,\ldots,N_k$, $k=1,2$). Выберем и зафиксируем точку Y_n^k, лежащую в области D_n^k. Определим ($n=1,\ldots,N_k$, $k=1,2$)

$$\theta(\Gamma_n^k,\Xi)=\begin{cases}1, & \Gamma_n^k\neq\Xi,\\ 0, & \Gamma_n^k=\Xi.\end{cases}$$

Введем функцию

$$\begin{aligned} w[\nu](x)=&-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^1}\nu(y)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_y}\ln|x-y|\,dl_y+\\ &+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{N_1}\theta(\Gamma_n^1,\Xi)\ln|x-Y_n^1|\int\limits_{\Gamma_n^1}\nu(y)\,dl_y+\\ &+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^2}\nu(y)\ln|x-y|\,dl_y+\\ &+\sum_{n=1}^{N_2}\frac{\beta}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_n^2}\nu(y)\left(\psi(x,y)-\theta(\Gamma_n^2,\Xi)\psi(x,Y_n^2)\right)dl_y, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\nu(y)\in C^0(\Gamma)$, а $\psi(x,y)$ — ядро углового потенциала [1, 6, 8]. Заметим, что первое слагаемое в (3) — потенциал двойного слоя [4] на Γ^1; второе — сумма точечных источников в точках $Y_n^1\notin D^{\rm int}$ ($n=1,\ldots,N_1$) (если $\Xi=\Gamma_m^1$ для некоторого номера m, то элемент суммы, отвечающий номеру m, равен нулю); третье — логарифмический потенциал [4] на Γ^2; четвертое — сумма модифицированных угловых потенциалов [6] на $\Gamma_n^2 \neq \Xi$ $(n=1,\ldots,N_2)$ и углового потенциала [1, 6, 8] на Ξ, если $\Xi=\Gamma_m^2$ для некоторого номера m.

Ядро углового потенциала $\psi(x,y)$ (см., напр., [7]) — многозначная гармоническая функция, сопряженная по Коши–Риману к функции $\ln|x-y|$, где $|x-y|$ — расстояние между точками x и y. Геометрически $\psi(x,y)+2\pi k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ — угол между вектором $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ и осью абсцисс: $(\cos\psi(x,y),\sin\psi(x,y))=\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|x-y|}$.

Выбор ветвей функции $\psi(x,y)$ осуществим следующим образом. Если $y\in\Gamma_n^2$, а $x\in D_n^2$, то выберем и зафиксируем точку $y^n\in\Gamma_n^2$ $(n=1,\ldots,N_2)$. Под $\psi(x,y)$ будем понимать любую фиксированную ветвь этой функции, которая непрерывно меняется по x в области D_n^2 и по y на $\Gamma_n^2\backslash y^n$. Если $y\in\overline{D_n^2}$, а x лежит в области $R^2\backslash\overline{D_n^2}$, то $\psi(x,y)$ — любая фиксированная ветвь этой функции, которая непрерывно меняется по y в $\overline{D_n^2}$ и по x в произвольной фиксированной односвязной области $\tilde{D}_n^2$, вложенной в $R^2\backslash\overline{D_n^2}$. В результате $w[\nu](x)$ — однозначная функция в $\overline{D}^{\rm int}$ (см. [6, 7]).

Выберем и зафиксируем в области $D^{\rm int}$ некоторую произвольную точку $x^0\in D^{\rm int}$. Решение задачи $S^{\rm int}$ будем искать в виде

$$\begin{aligned} &u[\nu](x)=w[\nu](x)+C[\nu],\\ &C[\nu]=-w[\nu](x^0)+\int\limits_{\Gamma}\nu(y)dl_y. \end{aligned} \tag{4}$$

Функция $u[\nu](x)$, определенная в (4), удовлетворяет всем условиям задачи $S^{\rm int}$, за исключением граничных (см. [7]). Подставляя функцию $u[\nu](x)$ в граничное условие (1), получим (см. [7]) интегральное уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{\nu(x)}{2}+A[\nu](x)=f_1(x),\\ &A[\nu](x)=w[\nu](x)+C[\nu],\quad x\in\Gamma^1. \end{aligned} \tag{5}$$

(Здесь $w[\nu](x)$ — прямое значение функции (3) на Γ^1, константа $C[\nu]$ определена в (4).) Аналогично, для выполнения граничного условия (2) имеем:

$$(1+\beta^2)\left(\frac{\nu(x)}{2}+A[\nu](x)\right)=f_2(x),\quad x\in\Gamma^2,$$

где

$$\begin{aligned} A[\nu](x)=\;&\frac{1}{2\pi(1+\beta^2)}\times\\ &\times\sum_{n=1}^{N_1}\theta(\Gamma_n^1,\Xi)\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x}+\beta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}_x}\right)\ln|x-Y_n^1|\int\limits_{\Gamma_n^1}\nu(y)dl_y-\\ &-\frac{1}{2\pi(1+\beta^2)}\left(\int\limits_{\Gamma^1}\nu(y)\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{n}_x\partial\mathbf{n}_y}\ln|x-y|dl_y+\right.\\ &\left.+\beta\int\limits_{\Gamma^1}\nu(y)\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\tau}_x\partial\mathbf{n}_y}\ln|x-y|dl_y\right)+\\ &+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^2}\nu(y)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x}\ln|x-y|dl_y+\\ &+\sum_{n=1}^{N_2}\theta(\Gamma_n^2,\Xi)\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}_x}-\beta\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x}\right)\frac{\beta\ln|x-Y_n^2|}{2\pi(1+\beta^2)}\int\limits_{\Gamma_n^2}\nu(y)dl_y. \end{aligned} \tag{6}$$

Ядро оператора $A[\nu](x)$ является полярным на Γ^1 и непрерывным на Γ^2 [4]. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $f_1(x)\in C^0(\Gamma^1)$ и $f_2(x)\in C^0(\Gamma^2)$. Если $\nu(x)\in C^0(\Gamma)$ — решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода*

$$\begin{aligned} &\frac{\nu(x)}{2}+A[\nu](x)=f(x),\quad x\in\Gamma,\\ &f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in\Gamma^1,\\ \dfrac{f_2(x)}{(1+\beta^2)}, & x\in\Gamma^2, \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

где оператор $A[\nu](x)$ определен в (5) при $x\in\Gamma^1$ и в (6) при $x\in\Gamma^2$, то функция $u[\nu](x)$, заданная формулой (4), является решением задачи $S^{\rm int}$.

Изучим уравнение (7).

Лемма 1. *Уравнение (7) однозначно разрешимо в пространстве непрерывных функций для любой функции $f(x)$ из пространства непрерывных функций.*

Доказательство. Предположим, что однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода (7) имеет нетривиальное решение $\nu^0(x)\in C^0(\Gamma)$. По теореме 2 функция $u[\nu^0](x)$ — решение однородной задачи $S^{\rm int}$. Из теоремы 1 следует

$$u[\nu^0](x)\equiv0,\quad x\in\overline{D^{\rm int}}. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} u^*[\nu^0](x)=\;&\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^1}\nu^0(y)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}_y}\ln|x-y|dl_y+\\ &+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{N_1}\theta(\Gamma_n^1,\Xi)\psi(x,Y_n^1)\int\limits_{\Gamma_n^1}\nu^0(y)dl_y+\\ &+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^2}\nu^0(y)\psi(x,y)dl_y-\\ &-\frac{\beta}{2\pi}\sum_{n=1}^{N_2}\int\limits_{\Gamma_n^2}\nu^0(y)(\ln|x-y|-\theta(\Gamma_n^2,\Xi)\ln|x-Y_n^2|)dl_y, \end{aligned} \tag{9}$$

сопряженную к $u[\nu^0](x)$ по Коши–Риману [7]. Из тождества (8) и соотношений Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u^*}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial u^*}{\partial x_1}$$

получим

$$u^*[\nu^0](x) \equiv C = \text{const}, \quad x \in D^{\text{int}}. \tag{10}$$

Из выражения (9) видно, что функция $u^*[\nu^0](x)$ многозначна в D^{int} [7] и может быть однозначной только в том случае, если выполнены условия

$$\theta(\Gamma_k^1, \Xi) \int\limits_{\Gamma_k^1} \nu^0(y) dl_y = 0, \quad \theta(\Gamma_n^2, \Xi) \int\limits_{\Gamma_n^2} \nu^0(y) dl_y = 0, \tag{11}$$

где $k = 1, \ldots, N_1$, а $n = 1, \ldots, N_2$. Так как из (10) следует однозначность функции $u^*[\nu^0](x)$, то условия (11) выполнены. Условия (11) означают, что интеграл от плотности $\nu^0(y)$ по любой кривой из контура Γ, не совпадающей с кривой Ξ, равен нулю. Получим более полный результат. Запишем $u[\nu^0](x)$ из (4) в точке x^0, учитывая вид константы $C[\nu^0]$ из (4): $u[\nu^0](x^0) = \int\limits_{\Gamma} \nu^0(y) dl_y$. Используя (8) и (11), имеем:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Gamma_n^1} \nu^0(y) dl_y = 0, \quad n = 1, \ldots, N_1; \\ &\int\limits_{\Gamma_n^2} \nu^0(y) dl_y = 0, \quad n = 1, \ldots, N_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Используя (12), можно показать, что функция $u^*[\nu^0](x)$ является непрерывной в $R^2 \backslash \Gamma^2$ и гармонической в $R^2 \backslash \Gamma$. Учитывая (10), получим, что функция $u^*[\nu^0](x)$ удовлетворяет во внутренней области D_n^1, которая ограничена не совпадающей с Ξ кривой Γ_n^1 $(n = 1, \ldots, N_1)$, задаче Дирихле:

$$\Delta u^* = 0, \quad x \in D_n^1; \quad u^*|_{\Gamma_n^1} = C = \text{const}. \tag{13}$$

В том случае, если $\Xi = \Gamma_m^1$ (при некотором номере m), функция $u^*[\nu^0](x)$ удовлетворяет внешней задаче Дирихле в области $R^2 \backslash \overline{D_m^1}$:

$$\begin{aligned} &\Delta u^* = 0, \quad x \in R^2 \backslash \overline{D_m^1}; \quad u^*|_{\Xi} = C; \\ &u^* = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \to \infty. \end{aligned} \tag{14}$$

Выполнение условия на бесконечности вытекает из (12). Из единственности решения внутренней задачи Дирихле (13) и решения внешней задачи Дирихле (14) следует, что $u^*[\nu^0](x) \equiv C$ в $\overline{D_n^1}$ $(n = 1, \ldots, N_1)$ при $\Xi \neq \Gamma_n^1$ и $u^*[\nu^0](x) \equiv C$ в $R^2 \backslash D_m^1$ при $\Xi = \Gamma_m^1$. Так как $u[\nu^0](x)$ связана с $u^*[\nu^0](x)$ соотношениями Коши–Римана в $R^2 \backslash \Gamma$, то $u[\nu^0](x) \equiv C_n^1$ — некоторая константа в D_n^1 $(n = 1, \ldots, N_1)$ при $\Xi \neq \Gamma_n^1$ и $u[\nu^0](x) \equiv C_m^1$ — некоторая константа в $R^2 \backslash D_m^1$ при $\Xi = \Gamma_m^1$.

Из условий (12) очевидно, что функция $u[\nu^0](x)$ в окрестности контура Γ^1 представляет собой сумму потенциала двойного слоя с некоторой гармонической функцией. Используя теорему о скачке потенциала двойного слоя [4, 5] и учитывая (8), получим $\nu^0(x) \equiv -C_n^1$ при $x \in \Gamma_n^1$ $(n = 1, \ldots, N_1)$. Из условий (12) следует $C_n^1 = 0$ при $n = 1, \ldots, N_1$, и в результате:

$$\nu^0(x)|_{\Gamma^1} \equiv 0. \tag{15}$$

Если $\Gamma^2 = \varnothing$, то $\nu^0(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma$. Пусть далее $\Gamma^2 \neq \varnothing$. Из (6), (12) и (15) следует, что однородное уравнение (7) при $x \in \Gamma^2$ примет вид

$$\frac{\nu^0(x)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^2} \nu^0(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \ln|x - y| dl_y = 0, \quad x \in \Gamma^2. \tag{16}$$

Пусть $\Xi \subset \Gamma^1$, т.е. $\Xi \not\subset \Gamma^2$. Как показано в лемме 5 из работы [9], уравнение (16) имеет только тривиальное решение, значит, $\nu^0(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma$.

Пусть $\Xi \subset \Gamma^2$. Уравнение (16) получается при решении внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа с помощью потенциала простого слоя [10]. Из леммы 6 работы [10] следует, что если $\nu^0(x) \in C^0(\Gamma)$ — решение однородного уравнения (16), удовлетворяющее условию $\int\limits_{\Gamma^2} \nu^0(y) dl_y = 0$, то $\nu^0(x) \equiv 0$ на Γ^2. Так как условие $\int\limits_{\Gamma^2} \nu^0(y) dl_y = 0$ выполнено в силу (12), то $\nu^0(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma$.

В результате у однородного уравнения (7) нет нетривиальных решений, и по альтернативе Фредгольма уравнение (7) является однозначно разрешимым для любой $f(x) \in C^0(\Gamma)$, что и требовалось доказать.

Из леммы 1 и теоремы 2 следует теорема существования для задачи S^{int}.

Теорема 3. *Пусть* $f_1(x) \in C^0(\Gamma^1)$ *и* $f_2(x) \in C^0(\Gamma^2)$. *Тогда задача* S^{int} *имеет единственное решение, которое дается формулой* (4), *где* $\nu(x) \in C^0(\Gamma)$ — *решение однозначно разрешимого уравнения* (7).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 99-01-01063).

Литература

1. *Крутицкий П.А.* // ЖВМ и МФ. 1991. **31**, №1. С. 109.
2. *Крутицкий П.А.* // ЖВМ и МФ. 1997. **37**, №1. С. 117.
3. *Krutitskii P.A.* // Z. Angew. Math. Mech. 1999. **79**, No. 9. P. 591.

4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
5. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
6. *Крутицкий П.А., Чикилев А.О.* // Дифф. уравнения. 2000. **36**, № 9. С. 1196.
7. *Чикилев А.О., Крутицкий П.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. №2. С. 30 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 2. P. 31).
8. *Габов С.А.* // Матем. сб. 1977. **103(145)**, № 4. С. 490.
9. *Крутицкий П.А.* // Матем. заметки. 1996. **60**, № 1. С. 40.
10. *Крутицкий П.А.* // ЖВМ и МФ. 1996. **36**, № 1. С. 136.

Поступила в редакцию
09.02.01

УДК 517.958:533.7

ДИССИПАТИВНЫЕ СЛАГАЕМЫЕ В КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ПОЛЕ ТЕЧЕНИЯ В УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Т. Г. Елизарова*), М. Е. Соколова

(*кафедра математики*)

E-mail: telizar@yahoo.com

Приведен общий вид квазигазодинамических уравнений и вид дополнительных диссипативных слагаемых в цилиндрической и декартовой системах координат. Продемонстрировано влияние дополнительной диссипации на параметры течения газа в ударной волне.

Проблема описания течений газа с помощью моделей, расширяющих возможности традиционных уравнений Навье–Стокса (НС), уже долгое время интересует исследователей. Одной из таких моделей является система квазигазодинамических (КГД) уравнений [1–4]. Эта система описывает поведение пространственно-временных средних — плотности, скорости и температуры, а не мгновенных пространственных средних, как в теории НС. КГД-уравнения отличаются от уравнений НС дополнительными дивергентными слагаемыми с параметром размерности времени в качестве коэффициента. Дополнительная диссипация, присутствующая в КГД-уравнениях, обеспечивает эффективность численных алгоритмов, построенных на их основе [1, 4, 5]. Представляется интересным изучение роли этой дополнительной диссипации на примере конкретных газодинамических течений. Отметим, что КГД-уравнения отличаются от других, близких по структуре систем, которые предлагались в работах [6, 7].

Течение газа описывается с помощью трех законов сохранения — массы, импульса и энергии, — которые могут быть представлены в индексном виде в обычных обозначениях как

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla_i J^i = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, u^k) + \nabla_i J^i u^k \; + \nabla^k p = \nabla_i\; \Pi^{ik}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}E + \nabla_i \frac{J^i}{\rho}(E+p) + \nabla_i q^i = \nabla_i(\Pi^{ik}u_k). \tag{3}$$

Для замыкания системы (1)–(3) необходимо определить выражения для вектора плотности потока массы J^i, тензора вязких напряжений Π^{ik} и вектора теплового потока q^i.

Система уравнений НС описывает поведение мгновенных пространственных средних значений газодинамических параметров ρ, u^i, p. Соответствующие выражения для величин J^i_{NS}, Π^{ik}_{NS} и q^i_{NS} приведены, например, в работе [8]. Если для вычисления ρ, u^i и p использовать пространственно-временные средние, то систему уравнений (1)–(3) можно замкнуть двумя другими способами [2, 3]. Для идеального политропного газа такое замыкание имеет вид

$$J^i_{QGD} = \rho u^i - \tau(\nabla_j(\rho u^i u^j) + \nabla^i p), \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\Pi^{ik}_{QGD} = \Pi^{ik}_{NS} + \tau u^i(\rho u^j \nabla_j u^k + \nabla^k p) + \\ + \tau g^{ik}(u_j \nabla^j p + \gamma p \nabla_j u^j),\end{aligned} \tag{5}$$

$$q^i_{QGD} = -k\nabla^i T - \tau\rho u^i \left(u^j \nabla_j \varepsilon + p u_j \nabla^j \left(\frac{1}{\rho}\right)\right) \tag{6}$$

и образует КГД-систему уравнений. Второй способ замыкания образует КГД-систему, справедливую для описания течений неидеальных газов и жидкостей.

В приведенных уравнениях ∇_i и ∇^i — ко- и контравариантные производные, g^{ij} — метриче-

*) Институт Математического моделирования РАН.