УДК 517.958; 621.372.8

О ВЕЩЕСТВЕННЫХ РЕЗОНАНСАХ В ВОЛНОВОДЕ С НЕОДНОРОДНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, М. Д. Малых

(*кафедра математики*)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Рассмотрены погруженные в непрерывный спектр собственные значения спектральных задач для акустического и электромагнитного волноводов с заполнением. Указан критерий существования бесконечной последовательности собственных значений для заполнений типа «вставки». В случае заполнения типа «простой вставки» и «колена» собственные значения найдены как корни трансцендентных уравнений.

Рассмотрим нерегулярный цилиндрический волновод Ω, заполненный неоднородным веществом, которое характеризуется положительной функцией $q(x,y)$. Спектральная задача для таких волноводов имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)+k^2 q(x,y)u(x,y)=0, & (x,y)\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0, \\ \nabla u\in L_2(\Omega). \end{cases} \tag{1}$$

Отсутствие аналога принципа Рэлея для погруженных в непрерывный спектр собственных значений ограниченного самосопряженного оператора значительно затрудняет исследование вопроса об их существовании. Поэтому в настоящее время не ясно, существуют ли вообще собственные значения, вложенные в непрерывный спектр, спектральной задачи (1). Вернер доказал, что эта задача имеет чисто непрерывный спектр, если Ω — локально сжатый, плоский волновод, заполненный однородным веществом, т. е. $q(x,y)$ — константа, а граница волновода удовлетворяет некоторым условиям (гладкости и монотонности) [1].

В работе [2] показано, как заменить в задаче (1) граничное условие Дирихле на условие третьего рода, чтобы появилось вложенное собственное значение, а в [3, 4] найдено, что внутрь плоского волновода Ω с условием Неймана на границе можно поместить препятствие T так, чтобы спектральная задача

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)+k^2 q(x,y)u(x,y)=0, & (x,y)\in\Omega-T,\\ \dfrac{\partial}{\partial n}u\Big|_{\partial\Omega}=0, \quad \dfrac{\partial}{\partial n}u\Big|_{\partial T}=0, \\ \nabla u\in L_2(\Omega) \end{cases}$$

обладала хотя бы одним вложенным собственным значением.

В настоящей работе рассматривается полый плоский волновод постоянного сечения, заполненный однородным веществом с $q=1$, в которое перпендикулярно к оси волновода Ox вставлена одна или несколько пластин с различными $q\neq 1$, т. е. $q(x)$ является кусочно-постоянной функцией от x. В этом случае удается доказать существование бесконечной последовательности собственных значений задачи (1), если $q(x)\geqslant 1$ и $q(x)\not\equiv 1$. Для двух случаев (когда вставлены соответственно одна или две пластины) найдены трансцендентные уравнения, которым удовлетворяют собственные значения, и исследовано поведение собственных значений как функций параметров вставки (ср. [5]). В первом случае будем называть заполнение «простой вставкой», а во втором — «коленом».

1. Спектральные характеристики волновода с заполнением типа вставки

Пусть полый плоский волновод постоянного сечения

$$\Omega=\{x\in\mathbb{R}^1,\quad y\in[0,+\pi]\},$$

заполнен неоднородным веществом, характеризуемым кусочно-постоянной функцией $q(x,y)$. Рассмотрим спектральную задачу

$$\begin{cases} \Delta u+k^2 q(x)u=0,\\ u|_{y=0}=0, \quad u|_{y=\pi}=0, \\ u\in L_2(\Omega). \end{cases} \tag{2}$$

Будем искать классическое решение этой задачи, т. е. дважды непрерывно дифференцируемое вне разрывов функции $q(x)$, а вдоль разрывов удовлетворяющее условиям сшивки

$$[u]=\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=0. \tag{3}$$

В силу полноты системы тригонометрических функций решение (2) всегда можно представить в виде

$$u(x,y;\,k)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x;\,k)\sin(ny),$$

причем $u_n(x) \in L^2(\mathbb{R}^1) \cap C^1(\mathbb{R}^1)$. Подставляя это выражение в (2), получим

$$u_n'' = \left(n^2 - k^2 q\right) u_n. \tag{4}$$

С другой стороны, функция

$$u_n(x, y;\, k) = u_n(x;\, k) \sin(ny),$$

где $u_n(x)$ удовлетворяет уравнению (4) и принадлежит $L^2(\mathbb{R}^1) \cap C^1(\mathbb{R}^1)$, уже есть решение задачи (2). Поэтому все собственные функции задачи (2) исчерпываются следующим набором функций:

$$u_n(x, y;\, k) = u_n(x;\, k) \sin(ny), \quad n = 1, 2, \ldots$$

где $u_n(x;\, k)$ удовлетворяют задаче (4).

Эта задача сводится к квантовомеханической задаче о спектре одномерного уравнения Шрёдингера, поэтому можно утверждать, что при $n = 1, 2, \ldots$ все ее собственные значения лежат на интервале

$$\left(\frac{n^2}{\max\limits_x q(x)},\ n^2\right)$$

и при $q \geqslant 1$ для каждого n найдется хотя бы одно собственное значение задачи (4) (ср. с теоремой XIII.6 из [6]).

Это означает, что задача (2) при $q \geqslant 1$ имеет бесконечно много собственных значений. Следует отметить, что поскольку, как показал Джонс [2], непрерывный спектр задачи (2) заполняет полуось $[1, +\infty)$, лишь конечное число этих собственных значений не вложено в непрерывный спектр.

2. Заполнение типа «простой вставки»

Обратимся теперь к простейшему случаю:

$$q(x) = \begin{cases} q, & x \in (-1, +1), \\ 1, & \end{cases}$$

тогда собственная функция задачи (4) имеет вид

$$u_n(x) = \begin{cases} C_1 \exp\left\{\sqrt{n^2 - k^2}\, x\right\}, & x < -1, \\ C_3 \sin\left[\sqrt{k^2 q - n^2}\, x\right] + \\ \quad + C_4 \cos\left[\sqrt{k^2 q - n^2}\, x\right], & -1 < x < 1, \\ C_2 \exp\left\{-\sqrt{n^2 - k^2}\, x\right\}, & x > 1, \end{cases}$$

а условия сшивки (3) приводят к системе из четырех однородных линейных уравнений для определения констант $C_1, \ldots, C_4$. Эти уравнения разрешимы тогда и только тогда, когда k^2 как функция от q удовлетворяет одному из двух соотношений:

$$\sqrt{n^2 - k^2} \cos\left[\sqrt{k^2 q - n^2}\right] = \\ = \sqrt{k^2 q - n^2} \sin\left[\sqrt{k^2 q - n^2}\right]$$

или

$$\sqrt{n^2 - k^2} \sin\left[\sqrt{k^2 q - n^2}\right] = \\ = -\sqrt{k^2 q - n^2} \cos\left[\sqrt{k^2 q - n^2}\right].$$

Если собственное значение k^2 удовлетворяет первому соотношению, то ему отвечает нечетная собственная функция, а если второму — то четная собственная функция.

Эти уравнения позволяют вычислить все собственные значения задачи (2), меньшие некоторой заданной константы, при любом заданом значении q. На рис. 1 отмечены все резонансные частоты (корни из собственных значений), величина которых меньше, чем 3, при $1 < q < 10$. Из этих графиков

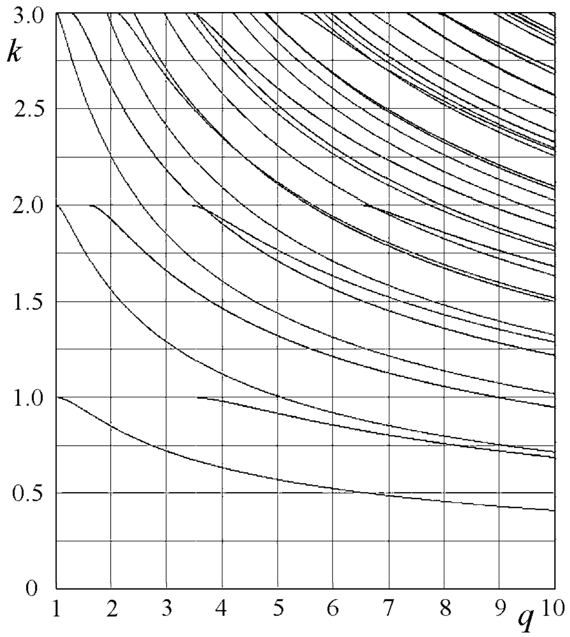

Рис. 1

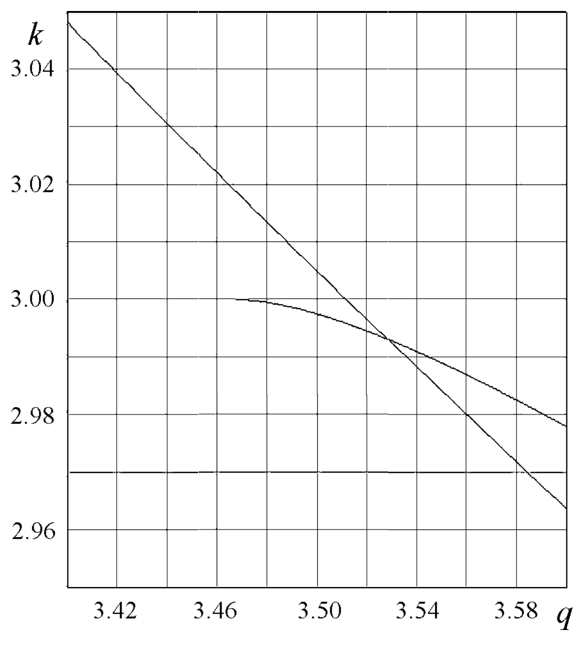

Рис. 2

видно, что число собственных значений задачи (2) между частотами отсечек $(n-1)^2$ и n^2 быстро растет с ростом n или q. Заметим еще, что у задачи (2) имеются кратные собственные значения при некоторых q (рис. 2).

3. Заполнение типа «колена»

Обратимся теперь к случаю заполнения типа «колена»:

$$q(x) = \begin{cases} q_1 > 1, & x \in (-a, 0), \\ q_2 < 1, & x \in (0, +b), \\ 1. \end{cases}$$

Повторяя проделанные выше выкладки, можно найти трансцендентное уравнение, которому удовлетворяют собственные значения задачи (4). При достаточно больших n у этого уравнения всегда появляются вещественные корни. Поэтому существует бесконечно много собственных значений задачи (2), хотя для заполнения этого типа из сказанного в п. 1 не следует существование даже одного собственного значения. Следует также отметить, что можно так подобрать константы, чтобы все собственные значения были вложены в непрерывный спектр. Например, при $q_1 = 1.35$, $a = 1$, $q_2 = 0.10$, $b = 4$ собственные значения распределены на интервалах между квадратами частот отсечки следующим образом: на интервале $[0,1]$ нет ни одного собственного значения, на интервалах $[n^2, (n+1)^2]$ при $n = 1, \ldots, 5$ лежит по одному собственному значению, при большем n число собственных значений на интервалах $[n^2, (n+1)^2]$ начинает расти.

4. Электромагнитный случай

Уравнение Гельмгольца (2) можно рассматривать как первое приближение к изучению собственных значений спектральной задачи для волновода в электромагнитом случае. На простом примере прямоугольного волновода с неоднородностью типа простой вставки можно убедиться, что эффект резонанса, изученный выше для акустического волновода, также имеет место в электромагнитном случае. В частности, при $\varepsilon \geqslant 1$ и $\mu = 1$ у волновода существует бесконечно много собственных значений, каждое из которых двукратно.

В заключение хотелось бы отметить, что все результаты пп. 1–3 прямо переносятся на трехмерный случай, если всюду заменить n^2 на частоты отсечки α_n^2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 00-01-00111).

Литература

1. *Werner P.* // Z. Angew. Math. Mech. 1987. **67**, No 4. P. 43.
2. *Jones D.S.* // Proc. Camb. Soc. 1953. **49**. P. 668.
3. *Evans D. V., Levitin M., Vassiliev D.* // J. Fluid Mech. 1994. **261**. P. 21.
4. *Davies E.B., Parnovski L.* // Q. J. Mech. Appl. Math. 1998. **51**. P. 477.
5. *Шестопалов В.П.* Спектральная теория и возбуждение открытых структур. М.: Наука, 1987.
6. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию
14.03.01

УДК 519.6.616

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИММУНОЛОГИИ И ИХ ОПРОБОВАНИЕ НА ЭВМ

А. А. Володин, В. Б. Гласко, Е. А. Ровенская, С. В. Родионов

(*кафедра математики*)

E-mail: alexandrss@mail.ru

Рассматриваются две квазиравновесные модели иммунологии. Для одной из них изучается проблема единственности решения соответствующих обратных задач. Приводятся результаты математических экспериментов с оценкой достижимой погрешности.

Настоящая статья посвящена разработке алгоритмов решения двух различных обратных задач иммунологии, предложенных в работе [1], и их апробированию на ЭВМ.

1. Процесс активации иммунокомпетентных клеток, соответствующий первой из этих задач, может быть описан системой уравнений [2]

$$\begin{aligned} &\frac{dA}{dt} = -\alpha A + \beta B, && A(0) = A_0; \\ &\frac{dB}{dt} = -\beta B, && B(0) = B_0; \\ &n(A) = c_0 \frac{dt}{dA}, \end{aligned} \tag{1}$$