УДК 517.248.21

О РЕЗОНАНСНОМ КВАНТОВОМ ПРЕДЕЛЕ ДЛЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ АНТЕННЫ

А. М. Чеботарев, А. В. Чуркин, Г. В. Рыжаков, А. М. Синев

(*кафедра квантовой статистики и теории поля*)

E-mail: alex@cheb.phys.msu.su; churandr@mail.ru

В квантовой теории измерений чувствительность измерительного прибора ограничена снизу стандартным квантовым пределом (СКП). Выражение для СКП, полученное авторами для точно решаемой задачи об интерференционном детекторе гравитационных волн, позволяет оценить минимальное значение искривления метрики в периодической гравитационной волне в резонансном и нерезонансном случаях. Рассматривается зависимость СКП от выбора наблюдаемой величины и от интенсивности лазерного луча при экспоненциальном распределении числа фотонов.

Введение

В настоящей работе получены оценки стандартного квантового предела (СКП) для чувствительности гравитационного детектора типа LIGO [1]. Такие ограничения чувствительности следуют из базисных принципов квантовой механики. С конца 1960-х гг. группой ученых под руководством В.Б. Брагинского был опубликован ряд работ, посвященных оценкам СКП для различных схем измерения слабых воздействий, и в частности для гравитационной антенны [2–5]. При этом величина СКП выводилась на основании соотношений неопределенности Гейзенберга. Авторам публикуемой работы удалось получить аналогичное выражение для СКП точности измерения положения квантового осциллятора в резонансном и нерезонансном случаях исходя из естественного условия, что среднее значение выходного сигнала должно быть больше, чем величина квадратного корня из дисперсии выходного сигнала.

1. Классическое решение. Выбор наблюдаемой

Динамика классического осциллятора, возмущенного внешней силой $F(t)$, описывается гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\omega_0^2 m\, x^2}{2} - x\, F(t).$$

Решение гамильтоновой системы с начальными условиями $x_0 = 0$, $p_0 = 0$ имеет вид

$$x_t = \int\limits_0^t \frac{F(s)}{m\omega_0} \sin\omega_0(t-s)\, ds.$$

Если позиция осциллятора измеряется интерферометрическим методом, то на выходе интерферометра Майкельсона переменная часть интенсивности выходного сигнала может быть записана в виде

$$A(t) = \frac{I_N}{2i}\left(\mathrm{e}^{i\omega x_t/c} - \mathrm{e}^{-i\omega x_t/c}\right) = I_N \sin\theta_t, \qquad (1)$$

где разность фаз

$$\theta_t = \frac{\omega}{\omega_0}\int\limits_0^t \frac{F(s)}{mc}\sin\omega_0(t-s)\, ds.$$

Здесь I_N — входная интенсивность лазерного луча, $\omega \approx 4\cdot 10^{14}$ с$^{-1}$ — оптическая частота лазерного луча и $\frac{\omega x}{c} = \frac{2\pi x}{cT} = \frac{2\pi x}{\lambda} = \Delta\varphi$ — фазовый сдвиг, вызванный смещением осциллятора x.

В случае, когда гравитационная волна падает перпендикулярно к плоскости детектора, действующая на осциллятор сила $F(t)$ записывается следующим образом: $F(t) = Lm\omega_g^2 h_0 \cos\omega_g t$, где L — расстояние между осцилляторами, ω_g — частота гравитационной волны, h_0 — амплитуда искривления метрики. Для реального прибора LIGO $\omega_g \approx 30$ с$^{-1}$, $L = 4\cdot 10^3$ м, $h_0 \approx 1.4\cdot 10^{-24}$.

2. Квантовая модель, допускающая точное решение

Пространство состояний гравитационной антенны, представляющей собой лазерный луч и квантовый осциллятор, записывается следующим образом: $l_2 \otimes L_2(\mathbb{R})$. Гамильтониан системы в этом случае имеет вид тензорного произведения:

$$\widehat{H} = I \otimes \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega_0^2 m x^2}{2}\right) + \\ + \hbar\omega\, a^\dagger a \otimes I - I \otimes xF(t) - \frac{\hbar\omega}{c}\, a^\dagger a \otimes x,$$

где $\hbar\omega a^\dagger a$ — оператор энергии поля лазера, а $H_{\mathrm{int}} = -I\otimes xF(t) - \frac{\hbar\omega}{c}a^\dagger a \otimes x$ — сумма энергии взаимодействия осциллятора с гравитационной волной, создающей внешнюю силу $F(t)$, и энергии взаимодействия осциллятора с лучом лазера, создающим световое давление $\frac{\hbar\omega}{c}a^\dagger a$.

В представлении вторичного квантования

$$H = \hbar\left(\omega_0 \otimes (b^\dagger b + 1/2) + \omega\, a^\dagger a \otimes I - -(ga^\dagger a + f(t)) \otimes (b + b^\dagger)\right). \tag{2}$$

Тогда с точностью до постоянной энергии нулевых колебаний осциллятора $\frac{\hbar\omega_0}{2}$

$$H = \hbar(H_0 + H_{\text{int}}),$$
$$H_0 = \omega a^\dagger a \otimes I + \omega_0 \otimes b^\dagger b,$$
$$H_{\text{int}} = -(ga^\dagger a + f(t)) \otimes (b^\dagger + b),$$

где $f(t) = \frac{F(t)}{\sqrt{2m\omega_0\hbar}}$, $g = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}$.

Квантовый аналог классической наблюдаемой (1) записывается в виде

$$A = \frac{a^\dagger a}{2i}\left(\mathrm{e}^{i\omega\hat{x}/c} - \mathrm{e}^{-i\omega\hat{x}/c}\right) = = \frac{a^\dagger a}{2i}\left(\mathrm{e}^{ig(b^\dagger+b)} - \mathrm{e}^{-ig(b^\dagger+b)}\right).$$

Используя формулу Бейкера–Хаусдорфа, перепишем операторы наблюдаемых $\widehat{A}$ и $\widehat{A}^2$ в нормально упорядоченном виде относительно $b^\dagger$, b:

$$A = \frac{a^\dagger a\,\mathrm{e}^{-g^2/2}}{2i}\left(\mathrm{e}^{igb^\dagger}\,\mathrm{e}^{igb} - \mathrm{e}^{-igb^\dagger}\,\mathrm{e}^{-igb}\right),$$

$$A^2 = (a^\dagger a)^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2g^2}}{4}\left(\mathrm{e}^{2igb^\dagger}\,\mathrm{e}^{2igb} + \mathrm{e}^{-2igb^\dagger}\,\mathrm{e}^{-2igb}\right)\right).$$

Компоненты $\{h_0, h_1, \ldots\}$ нормированного вектора состояний $h \in l_2$ поля (первый сомножитель в тензорном произведении) описывают распределение числа фотонов: $P\{N = n\} = |h_n|^2$, а компоненты $\{v_0, v_1, \ldots\}$ нормированного вектора состояний $v \in l_2$ осциллятора (второй сомножитель в тензорном произведении) представляют собой вероятностное распределение состояний осциллятора $P\{E_{\text{osc}} = n\hbar\omega_0\} = |v_n|^2$, где E_{osc} — энергия осциллятора.

Наша задача состоит в детектировании внешней периодической силы $F(t)$. Для этого построим решение эволюционного уравнения

$$\frac{d}{dt}U_t = iHU_t, \quad U\Big|_{t=0} = I \otimes I \tag{3}$$

с гамильтонианом (2). Рассмотрим операторнозначную функцию u_t такую, что

$$U_t = \mathrm{e}^{iH_0 t}\, u_t, \quad \frac{d}{dt}u_t = iH_t u_t, \quad u\Big|_{t=0} = I \otimes I,$$

где

$$H_t = \mathrm{e}^{-iH_0 t}\, H_{\text{int}}\, \mathrm{e}^{iH_0 t} = -(ga^\dagger a + f(t))(b_t^\dagger + b_t),$$
$$b_t = \mathrm{e}^{-iH_0 t}\, b\, \mathrm{e}^{iH_0 t} = \mathrm{e}^{i\omega_0 t}\, b,$$
$$b_t^\dagger = \mathrm{e}^{-iH_0 t}\, b^\dagger\, \mathrm{e}^{iH_0 t} = \mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\, b^\dagger.$$

Заметим, что операторы $(ga^\dagger a + f(t))b^\dagger\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}$ коммутируют в разные моменты времени t. Следовательно, функция u_t может быть записана в виде

$$u_t = \mathrm{e}^{-ib^\dagger\overline{\beta}(t)}\, v_t, \quad \beta(t) = \int_0^t d\tau\, (ga^\dagger a + f(\tau))\, \mathrm{e}^{i\omega_0\tau},$$

а v_t удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}v_t = -i(ga^\dagger a + f(t))\, \mathrm{e}^{i\omega_0 t}\, \mathrm{e}^{ib^\dagger\overline{\beta}(t)}\, b\, \mathrm{e}^{ib^\dagger\overline{\beta}(t)}\, v_t = = -i(ga^\dagger a + f(t))\, \mathrm{e}^{i\omega_0 t}\left(b - i\overline{\beta}(t)\right) v_t$$

с начальным условием $v\Big|_{t=0} = I \otimes I$. (Черта сверху обозначает комплексное сопряжение.) Решение этого уравнения:

$$v_t = \mathrm{e}^{-ib\beta(t) - C(t)},$$
$$C(t) = \int_0^t ds\, (g\, a^\dagger a + f(s))\, \mathrm{e}^{i\omega_0 s}\, \overline{\beta}(s),$$

где $C(t)$ — многочлен второй степени от оператора $g\, a^\dagger a$:

$$C(t) = c_0(t) + g\, a^\dagger a\, c_1(t) + g^2 (a^\dagger a)^2 c_2(t)$$

с коэффициентами

$$c_0(t) = \int_0^t \int_0^\tau d\tau\, ds\, f(\tau) f(s)\, \mathrm{e}^{i\omega_0(\tau - s)},$$
$$c_1(t) = \int_0^t \int_0^\tau d\tau\, ds\, (f(\tau) + f(s))\, \mathrm{e}^{i\omega_0(\tau - s)},$$
$$c_2(t) = \int_0^t \int_0^\tau d\tau\, ds\, \mathrm{e}^{i\omega_0(\tau - s)}.$$

Следовательно, эволюционный оператор задачи (3) записывается как нормально упорядоченное произведение экспонент:

$$U_t = \mathrm{e}^{iH_0 t}\, \mathrm{e}^{-C(t)}\, \mathrm{e}^{-ib^\dagger\overline{\beta}(t)}\, \mathrm{e}^{-ib\beta(t)}. \tag{4}$$

Решение уравнений вида (3) рассматривается в работах [7, 8]. В нашем случае результат слегка отличается от приведенного в работе [8], а методика получения численной оценки результата подробно рассмотрена в [9].

Отметим, что $C(t)+\overline{C(t)}=\overline{\beta(t)}\beta(t)$, и допустим, что осциллятор находится в основном состоянии ψ_0. Тогда среднее значение выходного сигнала запишется в виде

$$I(t)=a^\dagger a\,\mathrm{e}^{-g^2/2}\,\mathrm{Im}\left(U_t\psi_0,\mathrm{e}^{igb^\dagger}\,\mathrm{e}^{igb}\,U_t\psi_0\right)_{l_2}=$$
$$=a^\dagger a\,\mathrm{e}^{-g^2/2}\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i(g-\beta(t))b}\,\psi_0,\right.$$
$$\left.\mathrm{e}^{2i\,\mathrm{Im}\left(g\exp\{i\omega_0 t\}\overline{\beta}(t)\right)}\,\mathrm{e}^{i(g-\beta(t))b}\,\psi_0\right)_{l_2}=$$
$$=a^\dagger a\,\mathrm{Im}\,\mathrm{e}^{-g^2/2+i\theta_t+ia^\dagger a\varphi_t},$$

где

$$\theta_t=\frac{\omega}{\omega_0}\int\limits_0^t\frac{F(\tau)}{mc}\sin\omega_0(t-\tau)d\tau,$$
$$\varphi_t=\frac{\omega}{\omega_0}\frac{\hbar\omega a^\dagger a}{mc^2}\int\limits_0^t\sin\omega_0(t-\tau)\,d\tau.$$

Следовательно,

$$I(t)=a^\dagger a\,\mathrm{e}^{-g^2/2}\sin(\theta_t+a^\dagger a\varphi_t).$$

Если постоянную составляющую светового давления не учитывать ($a^\dagger a\varphi_t=0$), то для фиксированного числа фотонов N, испускаемых лазером в единицу времени, выходной сигнал на детекторе выразится формулой

$$I(t)=N\,\mathrm{e}^{-g^2/2}\sin\theta_t. \qquad (5)$$

Разность фаз θ_t вдали от резонанса (при $\omega_0\neq\omega_g$) имеет вид

$$\theta_t=\frac{\omega}{c}h_0L\omega_g^2\left(\frac{\sin\omega_0 t-\frac{\omega_g}{\omega_0}\sin\omega_g t}{\omega_0^2-\omega_g^2}\right),$$

а вблизи резонанса (при $\omega_0\approx\omega_g$) в соответствии с классической теорией колебаний амплитуда увеличивается пропорционально времени t:

$$\theta_t\approx\frac{\omega}{2c}h_0L\left(\omega_0 t\cos\omega_0 t+\sin\omega_0 t\right).$$

Появление такой разности фаз, обусловленной воздействием гравитационной волны, может быть зарегистрировано, если дисперсия сигнала не будет превышать квадрата его среднего значения. Оценивая дисперсию $D(t)$ сигнала $I(t)$, мы получим предельное значение, при котором измерение станет возможным. Назовем его *резонансным стандартным квантовым пределом* для данного измерения.

3. Чувствительность гравитационной антенны

Обнаружение переменной составляющей выходного сигнала возможно, если выполняется следующее условие: $I(t)>\sqrt{D(t)}$. Для оценки интенсивности выходного сигнала в случае экспоненциального распределения числа фотонов необходимо оценить сумму

$$I(t)=\exp\left\{-N-\frac{g^2}{2}\right\}\mathrm{Re}\sum_0^\infty\frac{nN^n}{n!}\,\mathrm{e}^{i(\theta_t+n\varphi_t)},$$

где N — среднее число фотонов; при этом дисперсия распределения совпадает с N. Следовательно,

$$I(t)=N\,\mathrm{e}^{-N-g^2/2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{i\left(\theta_t+\varphi_t+N\,\mathrm{e}^{i\varphi_t}\right)}=$$
$$=N\,\mathrm{e}^{-g^2/2-N(1-\cos\varphi_t)}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{i(\theta_t+\varphi_t+N\sin\varphi_t)}.$$

Для экспоненциального распределения числа фотонов со средним $\langle a^\dagger a\rangle=N$ получаем $\langle(a^\dagger a)^2\rangle=N(N+1)$. Если осциллятор находится в основном состоянии ψ_0, то дисперсия вычисляется следующим образом:

$$S(t)=\frac{\mathrm{e}^{-N-2g^2}}{2}\,\mathrm{Im}\left(U_t\psi_0,\mathrm{e}^{-2igb^\dagger}\,\mathrm{e}^{-2igb}\,U_t\psi_0\right)=$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{-N-2g^2}}{2}\,\mathrm{Im}\sum_0^\infty\frac{N^n n^2}{n!}\,\mathrm{e}^{2i(\theta_t+n\varphi_t)}=$$
$$=\frac{N}{2}\,\mathrm{e}^{-N(1-\cos2\varphi_t)-2g^2}\times$$
$$\times\,\mathrm{Im}\left(N\,\mathrm{e}^{i(2\theta_t+4\varphi_t+N\sin2\varphi_t)}+\mathrm{e}^{i(2\theta_t+2\varphi_t+N\sin2\varphi_t)}\right).$$

Оценим дисперсию в точках $t_k=\frac{\pi}{\omega_0}(k+\frac{1}{2})$, где $\varphi_t=0$. Вне этих точек сигнал $I(t)$ пропадает, так как для $N=10^{23}$ функция $\exp\{-N(1-\cos2\varphi_t\}$ обращается в нуль. В выбранных точках получаем

$$I^2(t)=\frac{N^2\,\mathrm{e}^{-g^2}}{2}(1-\cos2\theta_t),$$
$$S(t)=\frac{N(N+1)}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2g^2}\cos2\theta_t\right),$$
$$D(t)=S(t)-I^2(t)=$$
$$=\frac{N^2}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-g^2}\right)\left(1+\mathrm{e}^{-g^2}\cos2\theta_t\right)+$$
$$+\frac{N}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2g^2}\cos2\theta_t\right).$$

Таким образом, для регистрации сигнала θ_t необходимо выполнение неравенства

$$\sin\theta_t>\sqrt{\frac{\mathrm{sh}\,g^2}{\frac{2N}{N+1}-\mathrm{e}^{-g^2}}}. \qquad (6)$$

Разлагая в ряд Тейлора левую и правую части неравенства (6) при $N\to\infty$ (большое число фотонов) по малым величинам θ_t и g, получаем условие детектируемости для наблюдаемой A:

$$\theta_t > g. \tag{7}$$

Подставляя в (7) выражения для θ_t и g, в резонансном случае получаем

$$h_0 > \frac{\frac{1}{L}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_0}}}{\omega_0 t \cos\omega_0 t + \sin\omega_0 t}.$$

Следовательно, для времени наблюдения $t \gg 2\pi/\omega_0$ справедлива следующая оценка резонансного стандартного квантового предела:

$$h_0 > \frac{1}{Lt\omega_0}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} = h_{RSQL}. \tag{8}$$

В нерезонансном случае неравенство (7) примет вид

$$h_0 > \frac{\frac{1}{L}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_0}}\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_g^2} - 1\right)}{\sin\omega_0 t + \frac{\omega_g}{\omega_0}\sin\omega_g t}.$$

4. Обсуждение результатов

Полученное условие (7) регистрируемости гравитационной волны на интерферометрическом детекторе имеет простую физическую интерпретацию. Пусть требуется зарегистрировать сдвиг массивного тела, приводящий к возникновению разности хода лучей лазера Δx. Поскольку $\theta_t = k\Delta x$, $g = k\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}$, где $k = \omega/c$ — волновое число лазерного луча, неравенство (8) примет вид

$$\Delta x > \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}. \tag{9}$$

С другой стороны, согласно гипотезе де Бройля, любому массивному движущемуся телу можно сопоставить длину волны $\lambda_D = \frac{\hbar}{mv}$, где mv — импульс тела. Так как максимальная скорость колеблющегося с частотой ω_0 тела равна $v = \Delta x\omega_0$, то неравенство (9) записывается в виде

$$\Delta x > \frac{\lambda_D}{2}.$$

Таким образом, для того чтобы зарегистрировать влияние гравитационной волны, необходимо выполнение следующего условия: разность хода лучей лазера, возникающая вследствие влияния гравитационной волны, должна быть больше половины длины волны де Бройля для детектора. Это условие согласуется с полученными в работах [2–6] оценками и является весьма общим условием осуществимости квантовых интерферометрических измерений.

Подставляя реальные параметры детектора LIGO в выражение (8), получаем, что прибор сможет за время t зарегистрировать периодическую гравитационную волну с амплитудой искривления метрики h_0, удовлетворяющей следующему условию:

$$h_0 > \frac{1}{Lt\omega_0}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} = h_{RSQL} \approx 10^{-24},$$

если частота приходящей волны совпадет с собственной частотой детектора и для числа фотонов в лазере справедливо ограничение (6).

Авторы выражают благодарность профессору Ф.Я. Халили за ряд ценных замечаний и дополнений.

Работа выполнена при частичной поддержке INTAS (грант 00-0959), и РФФИ (грант 01-01-06249).

Литература

1. *Brady P.R.* Searching for periodic sources with LIGO: Prepr. LANL gr-qc/9702050 (1997).
2. *Брагинский В.Б., Воронцов Ю.И., Халили Ф.Я.* // Письма в ЖЭТФ. 1978. **27**, №5. С. 296.
3. *Braginski V.B., Khalili F.Ya.* // JETP. 1983. **84**, No. 6. P. 1930.
4. *Брагинский В.Б.* // УФН. 1988. **156**, № 1. P. 93.
5. *Braginski V.B., Gorodetsky M.L., Khalili F.Ja.* Quantum limits and symphotonic states in free-mass gravitational-wave antennae: Prepr. LANL quant-ph/9806081 (1998).
6. *Pace A.F., Collett M.J., Walls D.F.* // Phys. Rev. 1993. **A47**, No. 4. P. 3173.
7. *Bose S., Jacobs K., Knight P.L.* // Phys. Rev. 1997. **A56**. P. 4175.
8. *Brif C., Mann A.* Quantum statistical properties of the radiation field in a cavity with a movable mirror: Prepr. LANL quant-ph/9902050 (1999).
9. *Chebotarev A.M.* Is it possible to estimate the oscillating sum $Z = \mathrm{e}^{-N}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{N^n}{n!}\exp\left\{i\left(\frac{An}{\sqrt{N}} + \frac{Bn^2}{2\sqrt{N^3}}\right)\right\}$ for $N = 10^{23}$?: Prepr. LANL math.na/0101029 (2001).

Поступила в редакцию
14.05.01