

УДК 621.315.592

## ОБМЕННЫЕ ЭФФЕКТЫ В ДВУМЕРНОМ ЭЛЕКТРОННОМ ГАЗЕ ПОЛУПРОВОДНИКА ПРИ КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

А. Г. Миронов

(кафедра физики полупроводников)

E-mail: scon282@phys.msu.su

Рассчитана обменная энергия электронов основной подзоны размерного квантования в узкой квантовой яме при произвольных концентрациях и температурах. Определены условия перехода двумерной электронной системы в спиново-поляризованное состояние за счет выигрыша в обменном вкладе в свободную энергию. Показано, что в определенной области концентраций при изменении температуры могут последовательно происходить два перехода — сначала в поляризованное, а затем в неполяризованное состояние.

### Введение

Вопрос о возможной неустойчивости неполяризованного состояния двумерной электронной системы за счет усиления эффектов обмена при низких концентрациях и температурах неоднократно обсуждался в литературе (см., напр., [1, 2]). Наряду с такими явлениями, как вигнеровская кристаллизация и перераспределение электронов в двойных квантовых ямах, эта задача теоретически рассматривалась в основном лишь для предельно низких температур. Прогресс в технологии изготовления наноструктур, позволяющий получать структуры с контролируемыми параметрами, повысил интерес к выяснению условий возможного проявления указанных эффектов в полупроводниковых сверхрешетках и структурах с множественными ямами. Так, в экспериментальной работе [3] высказывалось предположение о существенной роли кулоновского взаимодействия в наблюдавшихся аномалиях температурной зависимости проводимости. Однако интерпретация поведения системы при изменении температуры затруднена из-за отсутствия достаточно полных расчетов кулоновских вкладов в энергию при конечных температурах. Поэтому представляет интерес расчет температурной зависимости обменной энергии двумерной системы при конечных температурах (для почти вырожденного распределения электронов в довольно узком интервале температур соответствующий расчет выполнен в работе [4]). Цель настоящей работы состоит в нахождении обменной энергии двумерного электронного газа в широкой области концентраций и температур и в определении границы области на фазовой плоскости концентрация–температура, отвечающей спиново-поляризованному состоянию, а также температурной и концентрационной зависимости поляризации.

### 1. Обменная энергия двумерной системы электронов

Рассмотрим систему электронов в узкой квантовой яме или в одном слое сверхрешетки и будем счи-

тать яму достаточно узкой, так что заселена лишь низшая подзона размерного квантования. Нейтральность системы в целом, вследствие которой можно не учитывать прямого кулоновского взаимодействия, обеспечивается, например, однородным легированием («модель желе»). Расстояние между слоями сверхрешетки будем считать достаточно большим, и поэтому можно пренебречь перекрытием волновых функций электронов соседних слоев и эффектами перераспределения электронов между слоями.

Пусть  $\nu$  — поверхностная концентрация электронов,  $\rho_0$  — постоянная плотность состояний электронов (полная, для обоих направлений спина),  $E(\mathbf{p})$  — энергия двумерного свободного движения электронов вдоль плоскости слоя (отсчитываемая от дна основной подзоны размерного квантования),  $\mathbf{p}$  — двумерный волновой вектор; закон дисперсии  $E(\mathbf{p})$  будем считать изотропным и вырожденным по спину. Химический потенциал  $\mu_\sigma$  невзаимодействующих электронов со спином  $\sigma$ , входящий в равновесную функцию распределения  $n_{F\sigma}(E(\mathbf{p})) = (1 + \exp[(E(\mathbf{p}) - \mu_\sigma)/kT])^{-1}$ , связан с их концентрацией  $\nu_\sigma$  соотношением  $\mu_\sigma = kT\eta_\sigma = kT \ln(\exp(s_\sigma) - 1)$ , где  $s_\sigma = 2\nu_\sigma/(\rho_0 kT)$ .

В отсутствие поляризации  $\nu_\sigma = \nu_{-\sigma} = \nu/2$ ,  $\mu_\sigma = \mu_{-\sigma} = \mu$  и  $\eta(s) = \mu/kT = \ln(\exp(s) - 1)$ , где  $s = \nu/(\rho_0 kT)$ .

Обменная энергия электронов (в расчете на единицу площади) дается стандартным выражением

$$F_x = -S^{-2} \sum_{\sigma} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} n_{F\sigma}(E(\mathbf{k}_1)) n_{F\sigma}(E(\mathbf{k}_2)) \times \\ \times \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \exp(-i(\mathbf{r}_1 \mathbf{k}_2 + \mathbf{r}_2 \mathbf{k}_1)) \times \\ \times (\epsilon^2 / (2\epsilon |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)) \exp(i(\mathbf{r}_1 \mathbf{k}_1 + \mathbf{r}_2 \mathbf{k}_2)), \quad (1)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость,  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — двумерные радиус-векторы,  $S$  — площадь слоя. Проводя в (1) интегрирование по координатам и учитывая, что двумерный фурье-образ кулоновского

потенциала имеет вид  $V(q) = 2p/q$ , получим выражение

$$F_x(\eta(s), T) = -(e^2/\varepsilon)(\pi/2)^{1/2}(\rho_0 kT)^{3/2} \times \int_0^\infty dt \{\Phi_{-1/2}(\eta(s) - t^2)\}^2, \quad (2)$$

где

$$\Phi_\lambda(\eta) = \Gamma(\lambda + 1)^{-1} \int_0^\infty dx x^\lambda [1 + \exp(x - \eta)]^{-1} \quad (3)$$

— интеграл Ферми с индексом  $\lambda$ . Выражение, подобное (2), было получено для трехмерного случая в работе [5] (см. также [6]).

Результат численного интегрирования в (2) можно представить интерполяционной функцией от  $s$  вида

$$F_x(s, T) = -(e^2/\varepsilon)(\rho_0 kT)^{3/2} C_x s^{3/2} G(s), \quad (4)$$

$$G(s) = \sqrt{\frac{\alpha(s + b_1 s^2) + b_2 s^3}{1 + (b_1 + \beta)s + b_1 \alpha s^2 + b_2 s(\kappa \ln(1+s) + s^2)}},$$

причем параметры  $C_x = (32/9\pi)^{1/2} \approx 1.06$ ,  $\alpha = 9\pi^3/512$ ,  $\kappa = \pi^2/8$  и  $\beta = (4/\sqrt{3}) - 2$  обеспечивают требуемое поведение при больших и малых  $s$ , а  $b_1 = 0.2685$  и  $b_2 = 0.04547$  — подгоночные параметры. Функция  $G(s)$  определена так, что  $G(s) \rightarrow 1$  в случае предельно сильного вырождения (при  $s \rightarrow \infty$ ). Среднеквадратичная относительная ошибка этой аппроксимации в интервале  $0 < s < 25$  составляет  $2 \cdot 10^{-4}$ . Отметим, что декларированная в работе [3] точность аппроксимации в 1% достигается лишь при  $s > 4$ , а на нижней границе рассмотренного в [3] интервала, при  $s = 2.5$ , относительная ошибка достигает 5%.

## 2. Условия перехода в поляризованное состояние

Кроме найденного выше обменного вклада полная свободная энергия содержит еще вклады (от кинетической энергии и энтропии) невзаимодействующих электронов:

$$F_{id,\sigma}(T, \nu_\sigma) = -kT\rho_0 \int_0^\infty d\varepsilon \ln \left[ 1 + \exp\left(\frac{\mu_\sigma - \varepsilon}{kT}\right) \right] + \mu_\sigma \nu_\sigma = \quad (5)$$

$$= \rho_0 (kT)^2 \Phi_1(\eta_\sigma) + \mu_\sigma \nu_\sigma = (\nu_\sigma^2/\rho_0) K(s_\sigma(\nu_\sigma, T)),$$

где  $\Phi_1$  — интеграл Ферми (см. (2)). Эти вклады, как и обменный, аддитивны по спину. Поведение «идеального» вклада в свободную энергию  $F_{id}$  описы-

вается следующим интерполяционным выражением для функции  $K(s)$ :

$$K(s) \approx \tilde{K}(s) = \frac{2}{s} \left[ \ln(e^s - 1) + \frac{1 + a_1 s + \gamma a_2 s^2}{1 + (a_1 + \delta)s + a_2 s^2} \right] - 1,$$

где  $\gamma = \pi^2/6$ ,  $\delta = 1/4$ ,  $a_1 = 13.10$ ,  $a_2 = 1.90$ ,  $a_3 = 4.75$ . Отметим, что  $K(s) \rightarrow 1$  при  $s \rightarrow \infty$ . Как и выше, греческими символами обозначены точные константы, обеспечивающие правильное поведение при  $s \rightarrow 0$  и при  $s \gg 1$ , а  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  — подгоночные параметры. Среднеквадратичная ошибка этого приближения составляет 0.44%. Однако, поскольку в ряде случаев результат для условий перехода в поляризованное состояние весьма чувствителен к качеству аппроксимации, мы использовали более точный (с относительной ошибкой не более  $10^{-5}$ ), хотя и более трудоемкий подход, основанный на аппроксимации функции  $\ln(1+x)$  в подынтегральном выражении в (5) интерполяционным многочленом [7].

Объединяя выражения (4) и (5), для вклада электронов со спином  $\sigma$  в полную свободную энергию (в расчете на единицу площади) получаем

$$F_\sigma = (\nu_\sigma^2/\rho_0) \left[ K(s_\sigma) - (\nu_C/2\nu_\sigma)^{1/2} G(s_\sigma) \right], \quad (6)$$

где  $\nu_C = (C_x/\pi d_C)^2$  — характерная «кулоновская» концентрация, а  $d_C = \varepsilon/(2\pi\rho_0 e^2)$ . Взяв для оценки  $\rho_0 = 3 \cdot 10^{13}$  эВ $^{-1}$ ·см $^{-2}$ ,  $\varepsilon = 12.7$ , находим:  $d_C = 4.7$  нм,  $\nu_C = 5.24 \cdot 10^{11}$  см $^{-2}$ . Одновременно введем характерную «кулоновскую» температуру  $T_C = \nu_C/(k\rho_0)$ ; при принятых значениях параметров  $T_C = 202$  К.

В отсутствие поляризации ( $\nu_\sigma = \nu_{-\sigma} = \nu/2$  и  $s_\sigma = s_{-\sigma} = s$ ) и при  $T \rightarrow 0$ , когда можно считать, что  $K(s) \approx G(s) \approx 1$ , мы имеем:

$$F_{\text{unp}}(\nu) = \sum_\sigma F_\sigma \approx (\nu^2 - \nu_C^{1/2} \nu^{3/2}) / (2\rho_0). \quad (7)$$

Отсюда видно, что  $\nu_C$  есть концентрация, при которой обменное слагаемое компенсирует вклад невзаимодействующих частиц. Отметим, что переходу в поляризованное состояние отвечают концентрации, составляющие лишь небольшие доли от  $\nu_C$ . Действительно, соответствующие концентрации можно оценить, сравнивая (7) с аналогичным выражением для полностью поляризованной системы ( $\nu_\sigma = \nu$ ,  $\nu_{-\sigma} = 0$ ),

$$F_{\text{pol}} = \left[ (2\nu)^2 - \nu_C^{1/2} (2\nu)^{3/2} \right] / (4\rho_0). \quad (8)$$

При  $T = 0$  К свободная энергия системы в поляризованном состоянии (8) оказывается мень-

шей энергии неполяризованного состояния (7) при  $\nu < \nu_{cr} = a\nu_C$ , где  $a = 3 - \sqrt{8} \approx 0.17$ .

Рассмотрим теперь свободную энергию частично поляризованной системы при конечных температурах. Положим  $\nu_\sigma = (1+z)\nu/2$  и  $\nu_{-\sigma} = (1-z)\nu/2$ , где величина  $z$ ,  $0 < z < 1$ , равная доле электронов, изменивших направление спина, определяет степень поляризации системы. С учетом сказанного выше выберем в качестве масштабов концентрации и температуры величины  $\nu_u = a\nu_C$  и  $T_u = aT_C$  соответственно (при принятых значениях параметров  $\nu_u \approx 9 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ ,  $T_u \approx 35 \text{ К}$ ) и введем безразмерные переменные  $y = \nu/\nu_u$  и  $t = T/T_u$  (при этом  $s = y/t$ ). Запишем свободную энергию идеального газа, обменный вклад и полную свободную энергию в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} q(s) &= s^2 K(s), & g(s) &= s^{3/2} G(s), \\ f(s, t) &= q(s) - g(s) / (at^{1/2}). \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда полная свободная энергия частично поляризованной системы приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} F(tT_u, y\nu_u, z) &= [(kT)^2 / 4\rho_0] \varphi(t, y, z), \\ \varphi(t, y, z) &= f\left(\frac{y}{t}(1+z), t\right) + f\left(\frac{y}{t}(1-z), t\right). \end{aligned}$$

Равновесное значение доли изменивших ориентацию спинов  $z = z_{eq}(y, t)$ , т.е. степень поляризации системы, находится из условия абсолютного минимума  $F$  по  $z$ ; корни  $z_{eq}(y, t)$  уравнения  $\partial F / \partial z = 0$  определялись численными методами. Далее находилась критическая концентрация  $y_b(t)$ , отвечающая переходу в поляризованное состояние при заданной температуре  $t$ . Это означает, что при фиксированной температуре и при  $y < y_b(t)$  свободная энергия (частично) поляризованной системы  $F_{pol}$  меньше, чем соответствующая величина  $F_{unp}$  в отсутствие поляризации. Температурная зависимость критической концентрации  $y_b(t)$  показана на рис. 1.

Как и ожидалось, область значений температуры, при которых возможен переход в поляризованное состояние и существует нетривиальное решение для  $z_{eq}(y, t)$ , имеется лишь при  $y \sim 1$ , т.е. при достаточно малых концентрациях  $\nu \sim a\nu_C$  (см. рис. 1). Менее очевидным, однако, представляется то обстоятельство, что в некотором, хотя и небольшом, интервале концентраций  $1 < y < 1.04$  одному и тому же значению  $y$  отвечают два решения  $y_b$ . Это означает, что при понижении температуры система испытывает два перехода — сначала в поляризованное состояние, а затем снова в неполяризованное. Зависимость степени поляризации  $z_b(t)$  на границе перехода от температуры показана на рис. 2. Как видно из рис. 1, переход в поляризованное состояние возможен только при  $y < 1.04$ , причем он совершается сразу в состояние с конечной степенью

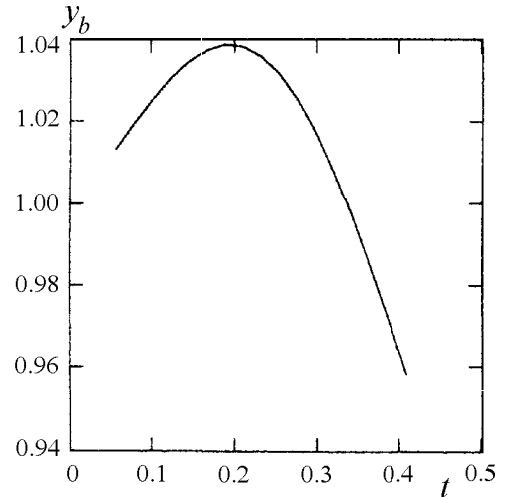


Рис. 1. Зависимость безразмерной критической концентрации  $y_b = \nu/\nu_u$  от безразмерной температуры  $t = T/T_u$

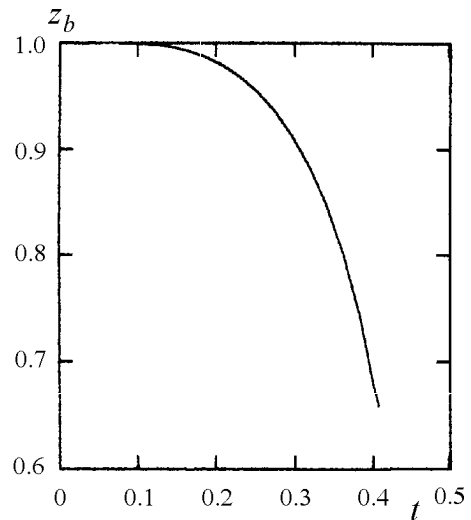


Рис. 2. Степень поляризации  $z_b$  на границе перехода в поляризованное состояние как функция температуры  $t = T/T_u$

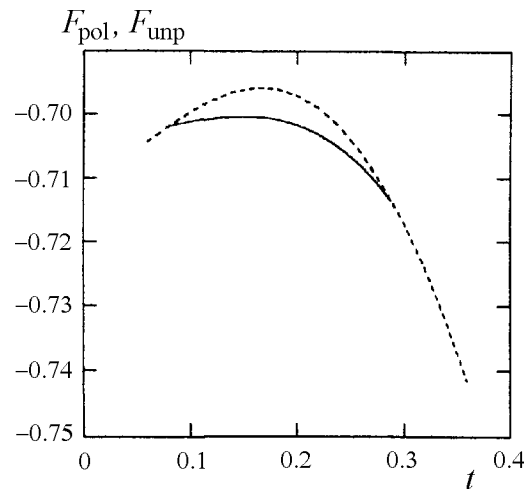


Рис. 3. Температурные зависимости свободной энергии в расчете на один электрон (отнесенной к  $kT_u$ ) для поляризованного (сплошная кривая) и неполяризованного (штриховая кривая) состояний

поляризации, очень быстро возрастающей до единицы при понижении температуры. Температурная зависимость полной удельной (т.е. в расчете на один электрон) свободной энергии, отнесенной к характерной энергии  $kT_u$ , приведена на рис. 3, где сплошная кривая относится к поляризованной фазе ( $F_{\text{пол}}$ ), а штриховая — к неполяризованной ( $F_{\text{нп}}$ ).

Таким образом, учет температурной зависимости обменного вклада в свободную энергию двумерного электронного газа позволил определить область существования поляризованного состояния, а также концентрационную и температурную зависимости поляризации системы.

Автор благодарен И.П. Звягину за полезное обсуждение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-02-16676) и программы «Университеты России — фундаментальные исследования».

## Литература

1. *Ceperley D.* // Phys. Rev. 1978. **B18**. P. 3126.
2. *Rajagopal R.K., Kimball J.C.* // Phys. Rev. 1997. **B15**. P. 2819.
3. *Richier G., Stolz W., Thomas P., Koch S., Marsch K., Zoyagin I.P.* // Superlattices and Microstructures. 1997. **22**. P. 475.
4. *Totsuji H., Tachibana H., Totsuji C., Nara S.* // Phys. Rev. 1995. **B51**. P. 11148.
5. *DeWitt E.* // J. Nucl. Energy. 1961. **C2**. P. 27.
6. *Kraeft W.-D., Kremp D., Ebeling W., Röpke G.* Quantum Statistics of Charged Particle Systems. Berlin: Akademie-Verlag, 1986 (*Крефт В.-Д., Кремп Д., Эбелинг В., Рёнке Г.* Квантовая статистика систем заряженных частиц. М.: Мир, 1988).
7. Справочник по специальным функциям. / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию  
26.03.01

## АСТРОНОМИЯ

УДК 523.746

### ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ В ЗВЕЗДАХ

**В. И. Григорьев, В. С. Ростовский**

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

**В рамках электронно-протонной равновесной модели звезд при учете принципа Паули обсуждаются физические причины наличия в их недрах электрических полей и ход величины их напряженности; даются численные оценки на примере Солнца.**

В подавляющем числе работ планеты и звезды рассматриваются как тела, в толще которых электрические поля отсутствуют. В частности, в таких известных книгах, как [1, 2], приводится как нечто общепризнанное мнение о квазинейтральности плазмы в недрах Солнца и звезд (значит, и об отсутствии там потенциальных электрических полей). Правда, было немало работ, авторы которых высказывали другое мнение. Обзор такого рода публикаций (в основном касающихся проблемы структуры короны и солнечного ветра) приведен в работе [3].

Утверждение об отсутствии электрических полей внутри планет, и особенно звезд, обычно обосновывается эквипотенциальностью любого проводящего тела. Однако в действительности электростатическое поле отсутствует лишь внутри однородных (как физически, так и химически) проводников.

При наличии неоднородностей внутренних напряжений в твердотельных проводниках (здесь мы не будем касаться интересного вопроса о возможной роли химических неоднородностей) электроны вытесняются из областей с большими в области

с меньшими механическими напряжениями (баро-электрический эффект). Теория этого эффекта и ее применение к объяснению (и предсказанию) ряда электрических и магнитных явлений в планетах земной группы, имеющих четко выраженную границу поверхности, наиболее полно изложены в монографии [4].

Непосредственно к звездам — плазменным образованиям, не имеющим резких внешних границ, на которых могли бы скапливаться вытесняемые из недр электроны, эта теория неприменима. Но это не означает, что в звездах отсутствует перераспределение зарядов и вызываемое им электрическое поле. В настоящей работе обсуждается возможный механизм формирования этого поля.

Протонная масса почти в 2000 раз превосходит электронную. Благодаря этому влияние гравитационного поля на протонную компоненту и соответственно воздействие распределения протонов на напряженность гравитационного поля значительно существеннее, чем воздействие электронной компоненты.