ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.21

РЕДУКЦИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

П. В. Голубцов, О. В. Старикова

(*кафедра математики*)

E-mail: starkost@mtu-net.ru

Учет инвариантности измерительных систем по отношению к определенной группе преобразований позволил существенно упростить решение задачи построения оптимальной измерительно-вычислительной системы, которая состоит в получении оптимального редукционного отображения (определяющего обрабатывающий алгоритм) для неточно заданной измерительной системы. Рассмотрен случай параметрической информации о схеме измерения.

Введение

При обработке результатов измерений для некоторых типов измерительных систем, особенно систем формирования изображений, возникают сложности, связанные с тем, что «поля зрения» исходных сигналов и результатов измерений являются довольно большими или потенциально бесконечными. В таких случаях разумно воспользоваться тем, что измерительные системы зачастую обладают инвариантностью, что выражается в однородности «полей зрения», описываемой действием некоторой группы. Использование этого свойства позволяет значительно упростить решения задачи синтеза измерительно-вычислительной системы [1, 2].

Очень часто на практике точное действие измерительной системы неизвестно, что приводит к неконтролируемой погрешности восстановления исходного сигнала. В такой ситуации имеет смысл рассмотреть задачу построения оптимального редукционного отображения для неточно заданной измерительной системы. В настоящей работе рассмотрен случай параметрической информации о схеме измерения. А именно: для схемы измерения $\xi = Af + \nu$ с «неизвестным» оператором A полагается, что у оператора неизвестны параметры $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, относительно которых задано априорное распределение Q. Нередко оказывается, что зависимость $A(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ является линейной или параметры меняются в достаточно узких пределах, чтобы ее можно было аппроксимировать линейной.

Задача редукции для инвариантной измерительной системы ставится как задача построения оптимального в некотором смысле редукционного отображения из класса отображений с заданным носителем функции влияния. То есть редукционный оператор выбирается так, чтобы качество синтезированной измерительно-вычислительной системы было наилучшим.

1. Инвариантные измерительные системы

Пусть заданы множества D и H — «поля зрения» исходных сигналов и результатов измерения соответственно. Эти множества могут быть и бесконечными. Так, при описании систем формирования изображений удобно считать, что эти множества образуют регулярные сетки на плоскости, например квадратную или гексагональную [2]. Пространства функций, заданных на этих множествах, будем обозначать соответственно $\hat{D}$ и $\hat{H}$ (вместо более традиционных $\mathbf{R}^D$ и $\mathbf{R}^H$). Если множества D и H бесконечны, то они являются бесконечномерными линейными пространствами, однако имеет место однородность, которая описывается заданием действия некоторой группы G на этих пространствах. А именно: пусть на множествах D и H задано действие некоторой группы G [3–5]. Определим действие группы G на $\hat{D}$ следующим образом:

$$(gf)(d) \stackrel{\text{def}}{=} f(g^{-1}d) \quad \forall f \in \hat{D}, \quad \forall d \in D, \quad \forall g \in G.$$

Аналогичным образом определяется действие группы G на $\hat{H}$. Измерительная система описывается линейным отображением A между пространствами $\hat{D}$ и $\hat{H}$ и корреляционной функцией σ шума. Будем рассматривать случай, когда A — линейная функция вектора параметров $\lambda \in \hat{L}$, где $L = \{1, \ldots, p\}$ — конечное множество. А именно: $A = \mathbf{B}\lambda$, где $\mathbf{B}\colon \hat{L} \to (\hat{D} \to \hat{H})$ — линейный оператор из пространства параметров $\hat{L}$ в пространство линейных операторов $\hat{D} \to \hat{H}$, т. е.

$$A = \mathbf{B}\lambda = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i B_i,$$

где $B_i\colon \hat{D} \to \hat{H}, i = 1, \ldots, p$.

В настоящей работе рассматриваются отображения, обладающие инвариантностью по отношению к группе G, т. е. $B_i g f = g B_i f$ для всех $f \in \hat{D}$, $g \in G$, и финитностью. Финитность в данном случае означает, что каждая точка пространства D действует посредством отображения B_i на конечное число точек из пространства H, и наоборот, на каждую точку из пространства H влияет посредством B_i конечное число точек из пространства D исходных сигналов.

Оператор B_i однозначно определяется своей функцией влияния $b_i(d,h)$:

$$(B_i f)(h) = \sum_d b_i(d,h) f(d)$$

для всех $f \in \hat{D}$. Суммирование в этой формуле корректно в силу того, что на каждую точку $h \in H$ влияет конечное число точек $d \in D$.

Удобно ввести следующее отношение $\Delta_i = \operatorname{supp} b_i$ между множествами D и H: запись $d\Delta_i h$ означает, что $d \in D$ влияет на $h \in H$ посредством оператора B_i: $\hat{D} \to \hat{H}$, т. е. $b_i(d,h) \neq 0$. Множество точек, которое испытывает влияние d, будем обозначать $d\Delta_i \subseteq H$, а множество точек, которое влияет на h, через $\Delta_i h \subseteq D$, таким образом, $d\Delta_i = \{h \in H \mid b_i(d,h) \neq 0\}$ и $\Delta_i h = \{d \in D \mid b_i(d,h) \neq 0\}$. Будем говорить, что Δ_i финитно, если для всех $d \in D, h \in H$ множества $d\Delta_i$ и $\Delta_i h$ конечны.

Если отображения B_i инвариантны, то отображение A также будет инвариантным. В свою очередь, несложно проверить, что отображение B_i G-инвариантно тогда и только тогда, когда функция b_i G-симметрична, т. е. $g b_i = b_i$ (где $g b_i(d,d') \stackrel{\text{def}}{=} b_i(g^{-1}d, g^{-1}d')$).

Совокупность орбит множества X относительно подгруппы G' будем обозначать $\mathrm{Orb}_{G'}(X)$, а стабилизатор элемента $h \in H$ (т. е. подгруппу группы G, оставляющую h на месте) обозначим $\mathrm{St}(h)$ [3–5]. Для заданного финитного носителя $\Delta \subset D \times H$ и для фиксированной точки $h \in H$ примем обозначение

$$\mathrm{O}_{\Delta,h} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Orb}_{\mathrm{St}_h}(\Delta h).$$

Лемма [2]. *Пусть $\Delta_i \subset D \times H$ — финитный носитель, действие группы G на H транзитивно и $h_0 \in H$ — некоторая точка. Тогда любая симметричная функция влияния b_i с носителем Δ_i взаимно однозначно определяется элементом $\tilde{b}_i \in \hat{\mathrm{O}}_{\Delta_i,h_0}$, т. е. набором значений $\tilde{b}_i(x)$, $x \in \mathrm{O}_{\Delta_i,h_0} = \mathrm{Orb}_{\mathrm{St}(h_0)}(\Delta_i h_0)$,*

$$b_i(d,h) = \tilde{b}_i(\mathrm{St}(h_0)(gd)),$$

где $g \in G$ переводит элемент h в h_0. Здесь $\mathrm{St}(h_0)(gd)$ — орбита элемента gd относительно стабилизатора элемента h_0.

Схема измерения сигнала $f \in \hat{D}$ имеет вид

$$\xi = Af + \nu, \tag{1}$$

где $\xi \in \hat{H}$ — результат измерения, A: $\hat{D} \to \hat{H}$ — оператор, описывающий измерительную систему, $\nu \in \hat{H}$ — шум (случайная функция) с известной корреляционной функцией σ, т. е. $\sigma(h,h') = \mathrm{E}\nu(h)\nu(h')$. Таким образом, измерительная система полностью определяется парой $[a,\sigma]$, где a — функция влияния оператора A, выражаемая через функции влияния b_i:

$$(Af)(h) = \sum_{d \in \Delta_a h} a(d,h) f(d) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{d_i \in \Delta_i h} \lambda_i b_i(d_i,h) f(d_i).$$

Будем говорить, что измерительная система $[a,\sigma]$ G-инвариантна, если функции a и σ G-симметричны.

2. Проблема синтеза оптимальной инвариантной измерительно-вычислительной системы в случае неточно заданной модели измерения

Рассмотрим случай, когда A — линейная функция вектора параметров $\lambda \in \hat{L}$, т. е. $A = \mathbf{B}\lambda$, где $\mathbf{B}$: $\hat{L} \to (\hat{D} \to \hat{H})$. Пусть оператор A известен неточно, а именно: априорная информация о параметрах имеет вид

$$\lambda = \lambda^0 + \lambda',$$

где $\lambda^0 = \mathrm{E}(\lambda)$, $\mathrm{E}(\lambda') = 0$, и известен корреляционный оператор T случайного элемента λ',

$$Tz \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}(\lambda', z)\lambda' \quad \forall z \in \hat{L},$$

матричные элементы которого $T_{i,j} = \mathrm{E}(\lambda'_i \lambda'_j)$. Таким образом, априорная информация об операторе A описывается парой $Q = [\lambda^0, T]$.

Рассмотрим схему измерений (1). Пусть V — некоторое G-пространство интерпретаций. И пусть задано некоторое финитное линейное инвариантное отображение U: $\hat{D} \to \hat{V}$, которое описывает идеальную систему измерения. Задача синтеза оптимальной измерительно-вычислительной системы состоит в построении отображения R: $\hat{H} \to \hat{V}$ с заданным носителем Δ_r таким образом, чтобы синтезированная измерительно-вычислительная система, описываемая схемой измерения

$$\zeta = R\xi = RAf + R\nu,$$

была максимально близка в среднем к идеальной. Будем рассматривать задачу с априорной информацией о сигнале. А именно: f предполагается случайной функцией с заданной G-симметричной корреляционной функцией φ.

Будем говорить, что a^* — функция влияния, сопряженная функции влияния a, если $a^*(h,d) = a(d,h)$. Заметим, что если a и b — G-симметричные функции влияния, то их композиция, т. е. $c = a * b$, и сумма также G-симметричны. Отметим, что композиция операторов является оператором с функцией влияния, равной композиции исходных функций влияния:

$$(c*a)(d,v) = \sum_{h\in\Delta_c v\bigcap d\Delta_a} c(h,v)a(d,h).$$

Функция влияния, сопряженная G-симметричной функции влияния, является G-симметричной функцией.

Для фиксированного G-инвариантного редукционного оператора R с функцией влияния r рассмотрим погрешность измерительно-вычислительной системы $r*[a,\sigma]$ в некоторой точке «поля зрения» интерпретационного пространства $v \in V$:

$$q_Q(r,v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{E}_Q q(r,a,v) = \mathrm{E}_Q[R\xi(v) - Uf(v)]^2.$$

Математическое ожидание здесь берется по всем случайным переменным, и в частности по априорной информации Q. Средняя погрешность может быть представлена в следующем виде:

$$q_Q(r,v) = \\ = \left(\left(r*\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^0 b_i - u\right)*\varphi*\left(r*\sum_{m=1}^{p}\lambda_m^0 b_m - u\right)^*\right)(v,v) + \\ + \left(r*(\sigma+\beta)*r^*\right)(v,v),$$

где $\beta(h,h') = \sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{p} T_{i,j}(b_i*\varphi*b_j^*)(h,h')$.

Таким образом, задача синтеза оптимальной измерительно-вычислительной системы состоит в нахождении функции влияния r_Q преобразования R: $\hat{H} \to \hat{V}$ из множества G-инвариантных операторов с заданным носителем Δ_r, которая минимизировала бы $q_Q(r,v)$, т. е.:

$$q_Q(r_Q,v) = \min\{q_Q(r,v) \mid \operatorname{supp} r \subseteq \Delta_r, v \in V\}. \quad (2)$$

Следующая теорема позволяет свести задачу (2) к системе линейных уравнений.

Т е о р е м а. *Пусть* $[a,\sigma]$ *— инвариантная измерительная система из* $\hat{D}$ *и* $\hat{H}$; φ *— симметричная корреляционная функция; действие группы* G *на пространстве* V *транзитивно;* u *— симметричная функция влияния, описывающая идеальную измерительную систему, действующую из* $\hat{D}$ *в* $\hat{V}$. *Тогда для задачи* (2) *существует оптимальная симметричная функция влияния* r_Q *с носителем* Δ_r. *Ее значения на орбитах определяются следующим образом.*

Пусть

$$s = \left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^0 b_i\right)*\varphi*\left(\sum_{m=1}^{p}\lambda_m^0 b_m^*\right) + \sigma + \beta,$$
$$t = u*\varphi*\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^0 b_i^*\right),$$

и пусть $v \in V$ *— некоторая фиксированная точка;* $\mathrm{O}_R = \mathrm{Orb}_{\mathrm{St}(v)}(\Delta v)$ *— семейство орбит множества* $\Delta v \in H$ *относительно стабилизатора элемента* v, $\hat{\mathrm{O}}_R$ *— линейное пространство функций, заданных на* O_R,

$$t \in \hat{\mathrm{O}}_R : \mathbf{t}(x) = |x|t(h,v), \quad x \in \mathrm{O}_R,$$

для некоторого $h \in x$ *(и не зависит от выбора* h *в силу симметрии* t*), где* $|x|$ *— число элементов орбиты* x, $\mathbf{P}$ *— линейный оператор в пространстве* $\hat{\mathrm{O}}_R$ *с матричными элементами*

$$\mathbf{P}(x,z) = \sum_{h'\in z, h''\in x} s(h',h''),$$

где $x \in \mathrm{O}_R$, $z \in \mathrm{O}_R$. *Тогда каждое решение* $\tilde{r} \in \hat{\mathrm{O}}_R$ *линейного уравнения*

$$\mathbf{P}\tilde{r} = \mathbf{t}$$

определяет значения на орбитах для функции влияния оптимального инвариантного преобразования R.

В приведенной теореме мы ограничились рассмотрением случая, когда группа G действует на V транзитивно. В общем случае пространство V разбивается на орбиты относительно группы G и для каждой орбиты решение строится совершенно аналогично. Таким образом, решение задачи сводится к решению нескольких систем линейных уравнений (для каждой орбиты в V — своя система) [1].

Литература

1. *Filatova S.A., Golubtsov P.V.* // Pattern Recognition and Image Analysis. 1991. **1**, No. 2. P. 224.
2. *Filatova S.A., Golubtsov P.V.* Automatic Object Recognition III / Ed. Firooz A. Sadjadi // Proc. SPIE. V. 1960. 1993. P. 483.
3. *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968.
4. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994.
5. *Armstrong M.A.* Groups and Symmetry. N. Y.: Springer-Verlag, 1988.

Поступила в редакцию
21.05.01