УДК 537.874

ТЕОРЕМА КОРРЕКТНОСТИ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ НА НЕОДНОРОДНОСТИ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Е. Ю. Еремина

(кафедра математики)

E-mail: heremina@chat.ru

Доказана теорема корректности граничной задачи рассеяния на неоднородности в слоистой среде. Показано, что для построения приближенного решения граничной задачи рассеяния в рамках метода дискретных источников достаточно лишь аппроксимировать условия сопряжения на поверхности рассеивателя в норме L_2.

В работе [1] рассматривалось решение граничной задачи рассеяния электромагнитной волны на частице в пленке на поверхности подложки. При этом предполагалась справедливость теоремы корректности граничной задачи рассеяния, однако доказательство этого утверждения отсутствовало. В настоящей работе приводится строгое доказательство теоремы корректности для задачи рассеяния на неоднородности, расположенной в слоистой среде.

Пусть поле $\{E_t, H_t\}$ удовлетворяет всем условиям следующей граничной задачи [1]:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\mathbf{H}_\xi = ik\varepsilon_\xi \mathbf{E}_\xi; \\
&\operatorname{rot}\mathbf{E}_\xi = -ik\mu_\xi \mathbf{H}_\xi \quad \text{в} \quad D_\xi, \qquad \xi = 0, f, 1, i, \\
&\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}_p \times (\mathbf{E}_i(p) - \mathbf{E}_0(p)) = 0,\\ &\mathbf{n}_p \times (\mathbf{H}_i(p) - \mathbf{H}_0(p)) = 0,\end{aligned}\right\} \quad p \in \partial D, \\
&\left.\begin{aligned}&\mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}_0(p) - \mathbf{E}_f(p)) = 0,\\ &\mathbf{e}_z \times (\mathbf{H}_0(p) - \mathbf{H}_f(p)) = 0,\end{aligned}\right\} \quad p \in \Sigma_f, \\
&\left.\begin{aligned}&\mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}_f(p) - \mathbf{E}_1(p)) = 0,\\ &\mathbf{e}_z \times (\mathbf{H}_f(p) - \mathbf{H}_1(p)) = 0,\end{aligned}\right\} \quad p \in \Sigma_1,
\end{aligned} \tag{1}$$

с условиями излучения или затухания на бесконечности для рассеянного частицей поля. Здесь $\mathbf{n}_p$ — нормаль к поверхности ∂D, $\{\mathbf{E}_\xi, \mathbf{H}_\xi\}$, где $\xi = 0, f, 1, i$, — полное поле в соответствующей области. В частности, поле $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ представляет собой сумму падающей волны, волны, отраженной от слоистой среды, и рассеянного частицей поля в D_0. Поверхность частицы предполагается достаточно гладкой, $\partial D \subset C^{(1,\alpha)}$, а параметры сред удовлетворяют условиям $\operatorname{Im}\varepsilon_t, \mu_t \leqslant 0$, $t = f, 1$ (временная зависимость $\exp\{i\omega t\}$).

Предположим, что поле $\{\mathbf{E}_t^0, \mathbf{H}_t^0\}$, $t = 0, 1, f$, есть решение задачи дифракции плоской волны на слоистой структуре в отсутствие частицы [1]. Тогда рассеянное поле вне частицы определяется выражением

$$\mathbf{E}_t^s := \mathbf{E}_t - \mathbf{E}_t^0, \quad \mathbf{H}_t^s := \mathbf{H}_t - \mathbf{H}_t^0, \quad t = 0, 1, f. \tag{2}$$

Граничная задача для рассеянного поля $\{\mathbf{E}_t^s, \mathbf{H}_t^s\}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\mathbf{H}_t^s = ik\varepsilon_t \mathbf{E}_t^s; \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}_t^s = -ik\mu_t \mathbf{H}_t^s \ \text{ в } D_t, \ t = 0, f, 1, \\
&\operatorname{rot}\mathbf{H}_i = ik\varepsilon_i \mathbf{E}_i; \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}_i = -ik\mu_i \mathbf{H}_i \ \text{ в } D_i, \\
&\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}_p \times \Big(\mathbf{E}_i(p) - \mathbf{E}_f^s(p)\Big) = \mathbf{n}_p \times \mathbf{E}_f^0(p),\\ &\mathbf{n}_p \times \Big(\mathbf{H}_i(p) - \mathbf{H}_f^s(p)\Big) = \mathbf{n}_p \times \mathbf{H}_f^0(p),\end{aligned}\right\} \ p \in \partial D, \\
&\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}_p \times \Big(\mathbf{E}_0^s(p) - \mathbf{E}_f^s(p)\Big) = 0,\\ &\mathbf{n}_p \times \Big(\mathbf{H}_0^s(p) - \mathbf{H}_f^s(p)\Big) = 0,\end{aligned}\right\} \quad p \in \Sigma_f, \\
&\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}_p \times \Big(\mathbf{E}_f^s(p) - \mathbf{E}_1^s(p)\Big) = 0,\\ &\mathbf{n}_p \times \Big(\mathbf{H}_f^s(p) - \mathbf{H}_1^s(p)\Big) = 0,\end{aligned}\right\} \quad p \in \Sigma_1,
\end{aligned}$$

с условиями излучения на бесконечности для рассеянного частицей поля.

Как известно [2], существует электромагнитный тензор Грина этой задачи $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^s_{e,h}(M,Q)$, удовлетворяющий условиям

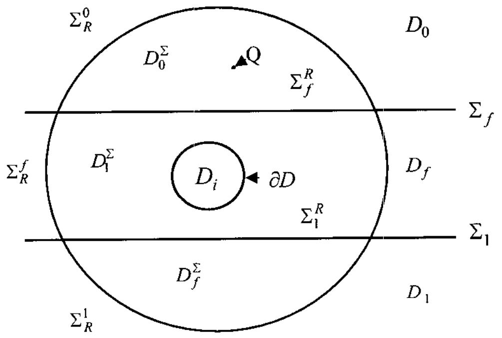
$$\begin{aligned}
&\nabla_M \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{ts}_e(M,Q) = -ik\mu_t \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{ts}_h(M,Q), \quad M \in D_t, \ t = 0, 1, f, \\
&\nabla_M \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{ts}_h(M,Q) = ik\varepsilon_t \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{ts}_e(M,Q) + \frac{i}{k_0\mu}\hat{I}\delta(M,Q), \quad Q \in D_0, \\
&\nabla_M \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{is}_e(M,Q) = -ik\mu_i \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{is}_h(M,Q), \\
&\nabla_M \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{is}_h(M,Q) = ik\varepsilon_i \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{is}_e(M,Q), \qquad \text{в} \ D_i, \\
&\mathbf{n}_p \times \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{0s}_{e,h}(P,Q) - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{fs}_{e,h}(P,Q)\right] = 0, \qquad P \in \Sigma_f, \quad (3) \\
&\mathbf{n}_p \times \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{fs}_{e,h}(P,Q) - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{1s}_{e,h}(P,Q)\right] = 0, \qquad P \in \Sigma_1, \quad (4) \\
&\mathbf{n}_p \times \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{fs}_{e,h}(P,Q) - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{is}_{e,h}(P,Q)\right] = 0, \quad P \in \partial D,
\end{aligned}$$

с условиями излучения на бесконечности. Здесь $\delta(M,Q)$ — дельта-функция Дирака.

В дальнейшем мы будем использовать векторный аналог формулы Грина

$$\int\limits_{D_i} \left(\mathbf{P}\cdot\Delta\overleftrightarrow{\mathbf{Q}} - \Delta\mathbf{P}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}\right) d\tau = = -\int\limits_{S} \mathbf{n}\left(\mathbf{P}\times\nabla\overleftrightarrow{\mathbf{Q}} + \nabla\mathbf{P}\times\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}\right) d\sigma. \tag{5}$$

Возьмем сферу Σ_R радиуса R с центром внутри частицы такую, что точка Q лежит внутри сферы. Обозначим через Σ_t^R, $t=1,f$, часть границы раздела слоев, лежащую внутри Σ_R, через Σ_R^t, $t=0,1,f$, часть поверхности сферы, принадлежащую соответствующей области D_t, а через D_t^Σ, $t=0,1,f$, — часть области D_t, заключенную внутри Σ_R (рисунок).



Далее будем последовательно применять соотношение (5) к $\mathbf{E}_t^s$ и $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_e^{ts}$ в различных областях D_t^Σ внутри сферы Σ_R. В D_0^Σ, используя определение $\delta(M,Q)$ в левой части и учитывая векторное тождество

$$\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{b}\times\overleftrightarrow{\mathbf{c}}\right) = -\mathbf{b}\cdot\left(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{c}}\right) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{c}},$$

получим

$$\mathbf{E}_0^s(Q) = ik\mu_0 \int\limits_{\Sigma_f^R+\Sigma_f^0} \Big\{[\mathbf{n}_p\times\mathbf{E}_0^s]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_h^{0s}(P,Q) + [\mathbf{n}_p\times\mathbf{H}_0^s]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_e^{0s}(P,Q)\Big\}\, d\sigma_p, \quad Q\in D_0^\Sigma. \tag{6}$$

Аналогично применяя (5) к $\mathbf{E}_t^s$ и $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_e^{ts}$ последовательно в каждой из областей D_1^Σ, D_f^Σ и D_i^Σ и учитывая, что точка Q лежит в области D_0, получим следующие выражения:

$$0 = \int\limits_{\substack{\Sigma_f^R+\Sigma_1^R+\\+\Sigma_R^f+\partial D}} \Big\{[\mathbf{n}_p\times\mathbf{E}_1^s]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_h^{1s}(P,Q) + [\mathbf{n}_p\times\mathbf{H}_1^s]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_e^{1s}(P,Q)\Big\}\, d\sigma_p, \tag{7}$$

$$0 = \int\limits_{\Sigma_1^R+\Sigma_R^1} \Big\{\left[\mathbf{n}_p\times\mathbf{E}_f^s\right]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_h^{fs}(P,Q) + \left[\mathbf{n}_p\times\mathbf{H}_f^s\right]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_e^{fs}(P,Q)\Big\}\, d\sigma_p, \tag{8}$$

$$0 = \int\limits_{\partial D} \Big\{[\mathbf{n}_p\times\mathbf{E}_i]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_h^{is}(P,Q) + [\mathbf{n}_p\times\mathbf{H}_i]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_e^{is}(P,Q)\Big\}\, d\sigma_p. \tag{9}$$

В интегралах, стоящих в правых частях, нормаль $\mathbf{n}_p$ всегда внешняя по отношению к рассматриваемой области.

Вычитая из (6) выражения (7), (8) и (9), с учетом условия (2), а также (3), (4) получим

$$\mathbf{E}_0^s(Q) = ik\mu_i \int\limits_{\partial D} \Big\{\left[\mathbf{n}_p\times\mathbf{E}_f^s - \mathbf{n}_p\times\mathbf{E}_i\right]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_h^{is}(P,Q) + \left[\mathbf{n}_p\times\mathbf{H}_f^s - \mathbf{n}_p\times\mathbf{H}_i\right]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_e^{is}(P,Q)\Big\}\, d\sigma_p. \tag{10}$$

В выражении (10) также учтено, что $\mathbf{E}_t^s$ и $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_e^{is}$ удовлетворяют условиям излучения на бесконечности, и при устремлении R к бесконечности интегралы по Σ_R^t, $t=0,f,1$, обращаются в нуль. Таким образом, мы получили представление для рассеянного поля $\mathbf{E}_t^s$ в D_0 через граничные значения внешнего возбуждения только на поверхности частицы ∂D.

Предположим теперь, что у нас есть поле $\left\{\tilde{\mathbf{E}}_t^s, \tilde{\mathbf{H}}_t^s\right\}$, удовлетворяющее системе уравнений Максвелла, условиям излучения и условиям сопряжения на границах раздела слоистой среды Σ_f, Σ_1. Тогда оно удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{H}}_t^s = ik\varepsilon_t\tilde{\mathbf{E}}_t^s;\quad \operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}}_t^s = -ik\mu_t\tilde{\mathbf{H}}_t^s \quad \text{в } D_t,\\
&\qquad\qquad t=0,f,1,i,\\
&\mathbf{n}_p\times\left(\tilde{\mathbf{E}}_0^s(p)-\tilde{\mathbf{E}}_f^s(p)\right)=0,\\
&\mathbf{n}_p\times\left(\tilde{\mathbf{H}}_0^s(p)-\tilde{\mathbf{H}}_f^s(p)\right)=0, \qquad p\in\Sigma_f,\\
&\mathbf{n}_p\times\left(\tilde{\mathbf{E}}_f^s(p)-\tilde{\mathbf{E}}_1^s(p)\right)=0,\\
&\mathbf{n}_p\times\left(\tilde{\mathbf{H}}_f^s(p)-\tilde{\mathbf{H}}_1^s(p)\right)=0, \qquad p\in\Sigma_1,
\end{aligned} \tag{11}$$

с условиями излучения на бесконечности для рассеянного частицей поля. Для этого поля можно записать соотношение, аналогичное (10):

$$\tilde{\mathbf{E}}_0^s(Q) = ik\mu_i \int\limits_{\partial D} \Big\{\left[\mathbf{n}_p\times\tilde{\mathbf{E}}_f^s - \mathbf{n}_p\times\tilde{\mathbf{E}}_i\right]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_h^{is}(P,Q) + \left[\mathbf{n}_p\times\tilde{\mathbf{H}}_f^s - \mathbf{n}_p\times\tilde{\mathbf{H}}_i\right]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_e^{is}(P,Q)\Big\}\, d\sigma_p. \tag{12}$$

Составим разность выражений (10) и (12) и возьмем максимум модуля от обеих частей в некотором компакте $d\subset D_0$. В результате с учетом неравенства Гельдера получим следующую оценку:

$$\left\|\mathbf{E}_0^s - \tilde{\mathbf{E}}_0^s\right\| \leqslant \leqslant \hat{C}_0\left\{\left\|\mathbf{n}_p\times\left(\mathbf{E}_f^s-\tilde{\mathbf{E}}_f^s\right) - \mathbf{n}_p\times\left(\mathbf{E}_i-\tilde{\mathbf{E}}_i\right)\right\|_{L_2(\partial D)} + \left\|\mathbf{n}_p\times\left(\mathbf{H}_f^s-\tilde{\mathbf{H}}_f^s\right) - \mathbf{n}_p\times\left(\mathbf{H}_i-\tilde{\mathbf{H}}_i\right)\right\|_{L_2(\partial D)}\right\}, \tag{13}$$

где $\hat{C}_0 = \max\limits_{Q\in d}\left\{\left\|\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{is}_e(P,Q)\right\|, \left\|\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{is}_h(P,Q)\right\|\right\}$. Поскольку точка Q лежит в D_0, то тензоры $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{is}_e(P,Q)$ и $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}{}^{is}_h(P,Q)$ аналитичны в d, значит, максимум достигается в d. Полученная оценка (13) представляет собой обобщение соотношения корректности [3] для внешней векторной задачи дифракции на случай наличия слоистой среды.

Замечание. При применении векторной формулы Грина в областях D_t, $t = 0, 1, f$, использована процедура сглаживания угловых точек (точек сопряжения границ Σ_R^t и Σ_t^R) сферой малого радиуса, который затем устремляется к нулю.

Итак, для построения приближенного решения $\left\{\tilde{\mathbf{E}}_0^s, \tilde{\mathbf{H}}_0^s\right\}$ в D_0, удовлетворяющего уравнениям Максвелла, условиям излучения и условиям сопряжения на границах раздела слоистой среды, достаточно лишь обеспечить выполнение условий сопряжения на поверхности частицы ∂D в норме $L_2(\partial D)$. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\{\mathbf{E}_t^s, \mathbf{H}_t^s\}$ — решение задачи для рассеянного поля, а $\left\{\tilde{\mathbf{E}}_t^s, \tilde{\mathbf{H}}_t^s\right\}$ — приближенное решение граничной задачи* (11). *Тогда чтобы обеспечить близость приближенного решения к точному на некотором компакте $d \subset D_0$, достаточно приблизить скачок тангенциальных компонент полей в норме $L_2(\partial D)$ на поверхности частицы.*

Автор выражает глубокую признательность профессору А.Г. Свешникову за поддержку, оказанную при написании статьи.

Литература

1. *Еремина Е.Ю., Свешников А.Г.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 6. С. 13 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 6. P. 16).
2. *Захаров Е.В.* // Вычислительные методы и программирование. Т. XXIV. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. С. 37.
3. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992.

Поступила в редакцию
06.06.01

УДК 530.145

ЭВОЛЮЦИЯ СПИНА ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. Е. Лобанов, О. С. Павлова, Г. А. Чижов

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: th180@phys.msu.su

Исследована динамика спина заряженной частицы с аномальным магнитным моментом в произвольном постоянном магнитном поле. Найден класс полей, в которых решение уравнения Баргмана–Мишеля–Телегди может быть представлено в аналитическом виде.

Будем рассматривать эволюцию спина заряженной частицы во внешнем поле на основе классического описания. Предполагаем, что движение частицы описывается уравнением Лоренца, а движение спина на известной траектории подчиняется уравнению Баргмана–Мишеля–Телегди (БМТ).

При определенном в явном виде законе движения уравнение БМТ, как дифференциальное уравнение первого порядка, имеет решение в виде матричного ряда. Однако в произвольных полях определение закона движения в явном виде невозможно. В предыдущих наших работах [1, 2] был предложен метод исследования динамики спина без предварительного решения уравнения Лоренца. В частности, в [1] была решена задача об эволюции спина в плосковолновых полях специального типа. В продолжение исследования этой проблемы в настоящей статье рассматривается движение спина частицы с аномальным магнитным моментом в произвольном постоянном магнитном поле. Цель работы — определить классы полей, в которых ряд, представляющий собой решение уравнения БМТ, имеет конечное число членов, и найти вид таких решений.

Для описания движения спина удобно использовать естественные координаты частицы, задаваемые ортами $(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, поскольку в постоянном магнитном поле величина вектора скорости остается фиксированной и, следовательно, движение частицы полностью определяется изменением ориентации естественного трехгранника. Как известно, эволюция ортов естественного трехгранника описывается системой кинематических уравнений Френе:

$$\dot{\mathbf{v}} = k\mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{v} + \varkappa\mathbf{b}, \quad \dot{\mathbf{b}} = -\varkappa\mathbf{n},$$

где k — кривизна, а $\varkappa$ — кручение. Используя