где $\hat{C}_0 = \max\limits_{Q\in d}\left\{\left\|\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_e^{is}(P,Q)\right\|, \left\|\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_h^{is}(P,Q)\right\|\right\}$. Поскольку точка Q лежит в D_0, то тензоры $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_e^{is}(P,Q)$ и $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_h^{is}(P,Q)$ аналитичны в d, значит, максимум достигается в d. Полученная оценка (13) представляет собой обобщение соотношения корректности [3] для внешней векторной задачи дифракции на случай наличия слоистой среды.

Замечание. При применении векторной формулы Грина в областях D_t, $t = 0, 1, f$, использована процедура сглаживания угловых точек (точек сопряжения границ Σ_R^t и Σ_t^R) сферой малого радиуса, который затем устремляется к нулю.

Итак, для построения приближенного решения $\left\{\tilde{\mathbf{E}}_0^s, \tilde{\mathbf{H}}_0^s\right\}$ в D_0, удовлетворяющего уравнениям Максвелла, условиям излучения и условиям сопряжения на границах раздела слоистой среды, достаточно лишь обеспечить выполнение условий сопряжения на поверхности частицы ∂D в норме $L_2(\partial D)$. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\{\mathbf{E}_t^s, \mathbf{H}_t^s\}$ — решение задачи для рассеянного поля, а $\left\{\tilde{\mathbf{E}}_t^s, \tilde{\mathbf{H}}_t^s\right\}$ — приближенное решение граничной задачи* (11). *Тогда чтобы обеспечить близость приближенного решения к точному на некотором компакте $d \subset D_0$, достаточно приблизить скачок тангенциальных компонент полей в норме $L_2(\partial D)$ на поверхности частицы.*

Автор выражает глубокую признательность профессору А.Г. Свешникову за поддержку, оказанную при написании статьи.

Литература

1. *Еремина Е.Ю., Свешников А.Г.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 6. С. 13 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 6. P. 16).
2. *Захаров Е.В.* // Вычислительные методы и программирование. Т. XXIV. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. С. 37.
3. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992.

Поступила в редакцию
06.06.01

УДК 530.145

ЭВОЛЮЦИЯ СПИНА ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. Е. Лобанов, О. С. Павлова, Г. А. Чижов

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: th180@phys.msu.su

Исследована динамика спина заряженной частицы с аномальным магнитным моментом в произвольном постоянном магнитном поле. Найден класс полей, в которых решение уравнения Баргмана–Мишеля–Телегди может быть представлено в аналитическом виде.

Будем рассматривать эволюцию спина заряженной частицы во внешнем поле на основе классического описания. Предполагаем, что движение частицы описывается уравнением Лоренца, а движение спина на известной траектории подчиняется уравнению Баргмана–Мишеля–Телегди (БМТ).

При определенном в явном виде законе движения уравнение БМТ, как дифференциальное уравнение первого порядка, имеет решение в виде матричного ряда. Однако в произвольных полях определение закона движения в явном виде невозможно. В предыдущих наших работах [1, 2] был предложен метод исследования динамики спина без предварительного решения уравнения Лоренца. В частности, в [1] была решена задача об эволюции спина в плосковолновых полях специального типа. В продолжение исследования этой проблемы в настоящей статье рассматривается движение спина частицы с аномальным магнитным моментом в произвольном постоянном магнитном поле. Цель работы — определить классы полей, в которых ряд, представляющий собой решение уравнения БМТ, имеет конечное число членов, и найти вид таких решений.

Для описания движения спина удобно использовать естественные координаты частицы, задаваемые ортами $(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, поскольку в постоянном магнитном поле величина вектора скорости остается фиксированной и, следовательно, движение частицы полностью определяется изменением ориентации естественного трехгранника. Как известно, эволюция ортов естественного трехгранника описывается системой кинематических уравнений Френе:

$$\dot{\mathbf{v}} = k\mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{v} + \varkappa\mathbf{b}, \quad \dot{\mathbf{b}} = -\varkappa\mathbf{n},$$

где k — кривизна, а $\varkappa$ — кручение. Используя вектор Дарбу

$$\boldsymbol{\Omega} = \varkappa \mathbf{v} + k\mathbf{b} = \frac{[\dot{\mathbf{v}} \times \ddot{\mathbf{v}}]}{(\dot{\mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}})},$$

уравнения Френе можно представить в симметричной форме:

$$\dot{\mathbf{v}} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}], \quad \dot{\mathbf{n}} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}], \quad \dot{\mathbf{b}} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{b}]. \qquad (1)$$

Определим оператор эволюции, переводящий начальные орты $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$, $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(0)$, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(0)$ в орты конечного состояния $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\tau)$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\tau)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\tau)$, где τ — собственное время. Для этой цели удобно использовать спинорное представление (см., напр., [3]), поставив в соответствие ортам начального и конечного состояния спин-тензоры: $\mathbf{v}_0 \to (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}_0)$, $\mathbf{v} \to (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v})$ и т. д. Тогда унитарный оператор эволюции определяется условиями

$$V(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}_0)V^+ = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}), \quad V(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}_0)V^+ = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}), \\ V(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}_0)V^+ = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}). \qquad (2)$$

В силу (1) уравнения для оператора эволюции имеют вид

$$\dot{V} = -\frac{i}{2}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\Omega})V, \quad \dot{V}^+ = \frac{i}{2}V^+(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\Omega})V, \qquad (3)$$

которые, учитывая (2), можно представить в форме

$$\dot{V} = -\frac{i}{2}V(\boldsymbol{\sigma}(\varkappa\mathbf{v}_0 + k\mathbf{b}_0)), \quad \dot{V}^+ = \frac{i}{2}(\boldsymbol{\sigma}(\varkappa\mathbf{v}_0 + k\mathbf{b}_0))V^+. \qquad (4)$$

Такая запись удобна тем, что в коэффициентную матрицу уравнения входят лишь векторы начальной ориентации трехгранника и две скалярные величины — кривизна и кручение.

Применим эти общие соотношения для решения задачи об эволюции спина в произвольном постоянном (неоднородном) магнитном поле $\mathbf{H}$.

Уравнение движения частицы в таком поле (уравнение Лоренца) имеет вид

$$\dot{\mathbf{v}} = [\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \qquad (5)$$

а уравнение БМТ, описывающее эволюцию спина заряженной частицы в поле [4], —

$$\dot{\mathbf{s}} = \left[\mathbf{s} \times \left\{\mathbf{H} + \frac{g-2}{2}[\gamma\mathbf{H} - (\gamma - 1)\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{H})]\right\}\right]. \qquad (6)$$

Здесь γ — релятивистский фактор, g — гиромагнитный коэффициент. В целях упрощения записи полагается $c = 1$ и делается замена $\frac{e}{m}\mathbf{H} \to \mathbf{H}$.

Воспользуемся подходом, предложенным в работе [1], который позволяет определить эволюцию спина с произвольными начальными условиями, используя решение уравнения для резольвенты уравнения (6) в спинорном представлении:

$$\dot{R} = \frac{i}{2}\Big\{(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}) + \frac{g-2}{2} \times \\ \times [\gamma(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}) - (\gamma - 1)(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v})(\mathbf{v}\mathbf{H})]\Big\}R. \qquad (7)$$

Для дальнейшего необходимо связать величину магнитного поля с ортами естественного трехгранника. Умножая уравнение (5) векторно на $\mathbf{v}$ при учете равенства $[\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}] = k\mathbf{b}$, получаем

$$\mathbf{H} = \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{H}) - k\mathbf{b}. \qquad (8)$$

Будем искать решение уравнения (7) в виде $R = VR_0$, т. е. разобьем матрицу, описывающую вращение спина, на оператор поворота естественного трехгранника и оператор поворота спина относительно этого трехгранника. Учитывая (3), (4) и (7), получаем

$$\dot{R}_0 = \frac{i}{2}\Big\{-\frac{g-2}{2}\gamma k(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}_0) + \\ + \frac{g}{2}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}_0)(\mathbf{v}\mathbf{H}) + \varkappa(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}_0)\Big\}R_0. \qquad (9)$$

Следовательно, для того чтобы определить ориентацию спина, нужно знать три скалярные функции: k, $\varkappa$ и $(\mathbf{v}\mathbf{H})$.

Применительно к задачам электродинамики уравнение, аналогичное (9), рассматривалось в работе [5]. Из результатов этой работы следует, что если ограничиться физически интересным случаем, когда ряд, определяющий решение, обрывается при произвольных значениях γ и g, то необходимо предположить, что функции, входящие в коэффициентную матрицу, должны быть пропорциональны:

$$\beta = \frac{(\mathbf{v}\mathbf{H})}{k} = \mathrm{const}, \quad \alpha = \frac{\varkappa}{k} = \mathrm{const}. \qquad (10)$$

Тогда уравнение для R_0 приобретает вид

$$\dot{R}_0 = -\frac{i}{2}k\left\{\frac{g-2}{2}\gamma(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}_0) - \left[\frac{g\beta}{2} + \alpha\right](\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}_0)\right\}R_0$$

и, если кривизна траектории задана как функция собственного времени $k = k(\tau)$, имеет следующее решение:

$$R_0 = \cos\frac{\omega}{2} - i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{t})\sin\frac{\omega}{2}, \qquad (11)$$

где

$$\omega(\tau) = \left\{\left(\frac{g-2}{2}\gamma\right)^2 + \left(\frac{g\beta}{2} + \alpha\right)^2\right\}^{1/2} \int\limits_0^\tau k(\tau)d\tau,$$

$$\mathbf{t} = \left\{ \left(\frac{g\beta}{2} + \alpha\right) \mathbf{v}_0 - \left(\frac{g-2}{2}\gamma\right) \mathbf{b}_0 \right\} \times \\ \times \left\{ \left(\frac{g-2}{2}\gamma\right)^2 + \left(\frac{g\beta}{2} + \alpha\right)^2 \right\}^{-1/2}.$$

Заметим, что при $\alpha = \varkappa/k = \mathrm{const}$ и уравнение для оператора эволюции трехгранника (4) тоже имеет точное решение:

$$V = \cos\frac{\omega_0}{2} - i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{t}_0)\sin\frac{\omega_0}{2}, \tag{12}$$

где

$$\omega_0(\tau) = \sqrt{1+\alpha^2}\int\limits_0^\tau k(\tau)d\tau, \quad \mathbf{t}_0 = (\alpha\mathbf{v}_0 + \mathbf{b}_0)/\sqrt{1+\alpha^2}.$$

Поскольку выражения для ω и ω_0 отличаются только постоянным коэффициентом, фактически мы имеем точное решение задачи о движении частицы со спином, записанное в параметрической форме. Следовательно, матрица поворота спина может быть выражена непосредственно через компоненты скорости частиц. Таким образом, ориентация спина частицы, движущейся по найденной траектории, жестко связана с ее скоростью.

Найдем поля, в которых реализуются условия (10) и можно получить решения уравнений Лоренца и БМТ в виде (12) и (11) соответственно. Используя (12), нетрудно определить орты естественного трехгранника явно:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{1}{1+\alpha^2}(\mathbf{v}_0 - \alpha\mathbf{b}_0)\cos\omega_0 + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\mathbf{n}_0\sin\omega_0 + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}(\alpha\mathbf{v}_0 + \mathbf{b}_0), \\ \mathbf{n} &= \mathbf{n}_0\cos\omega_0 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(\mathbf{v}_0 - \alpha\mathbf{b}_0)\sin\omega_0, \\ \mathbf{b} &= -\frac{\alpha}{1+\alpha^2}(\mathbf{v}_0 - \alpha\mathbf{b}_0)\cos\omega_0 - \\ &\quad - \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\mathbf{n}_0\sin\omega_0 + \frac{1}{1+\alpha^2}(\alpha\mathbf{v}_0 + \mathbf{b}_0). \end{aligned} \tag{13}$$

Из (13) следует, что существует такое направление, проекция скорости частицы $v_{||}$ на которое постоянна. Представим единичный вектор скорости в виде суммы $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_{-}$, а вектор напряженности магнитного поля на траектории в виде суммы $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{||} + \mathbf{H}_{-}$, где $\mathbf{H}_{||} = \mathbf{v}_{||}(\mathbf{v}_{||}\mathbf{H})/(\mathbf{v}_{||}\mathbf{v}_{||}) = \mathbf{v}_{||}H_{||}/v_{||}$, и подставим эти выражения в уравнение Лоренца (5). Поскольку $[\mathbf{v}_{||}\times\mathbf{H}_{||}] = 0$, $\dot{\mathbf{v}}_{||} = [\mathbf{v}_{-}\times\mathbf{H}_{-}] = 0$, $(\mathbf{v}_{-}\dot{\mathbf{v}}_{-}) = 0$, очевидно, что $\mathbf{H}_{-} = \mathbf{v}_{-}(\mathbf{v}_{-}\mathbf{H})/(\mathbf{v}_{-}\mathbf{v}_{-}) = \mathbf{v}_{-}H_{-}/v_{-}$. Поэтому (5) сводится к соотношению

$$\dot{\mathbf{v}}_{-} = [\mathbf{v}_{||}\times\mathbf{v}_{-}]\left\{\frac{H_{-}}{v_{-}} - \frac{H_{||}}{v_{||}}\right\}. \tag{14}$$

Для большей наглядности выберем систему координат так, чтобы $\mathbf{e}_z \parallel \mathbf{v}_{||}$, т.е. $\mathbf{v}_{||} = v_{||}\mathbf{e}_z$, $\mathbf{v}_{-} = v_{-}(\mathbf{e}_x\cos\theta + \mathbf{e}_y\sin\theta)$, причем $\mathbf{v}_{||}{}^2 + \mathbf{v}_{-}{}^2 = 1$, а $\theta = \theta(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$. Вектор напряженности магнитного поля на траектории частицы в этом случае имеет компоненты

$$\mathbf{H}_{||} = H_{||}\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{H}_{-} = H_{-}(\mathbf{e}_x\cos\theta + \mathbf{e}_y\sin\theta),$$

а вектор скорости частицы

$$\dot{\mathbf{r}}_{-} = v_{-}\sqrt{\gamma^2-1}(\mathbf{e}_x\cos\theta + \mathbf{e}_y\sin\theta), \quad \dot{z} = \sqrt{\gamma^2-1}v_{||}. \tag{15}$$

Уравнение (14) позволяет определить вектор ускорения через компоненты магнитного поля:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{-} = \sqrt{\gamma^2-1}\,(H_{-}v_{||} - H_{||}v_{-})(-\mathbf{e}_x\sin\theta + \mathbf{e}_y\cos\theta),$$

а прямое дифференцирование (15) дает для вектора ускорения

$$\ddot{\mathbf{r}}_{-} = \sqrt{\gamma^2-1}\,v_{-}\dot{\theta}(-\mathbf{e}_x\sin\theta + \mathbf{e}_y\cos\theta).$$

Сравнивая эти выражения, получаем $v_{-}\dot{\theta} = H_{-}v_{||} - H_{||}v_{-}$.

Поскольку $\dot{\theta} = \sqrt{\gamma^2-1}\,(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\theta$, то условие, обеспечивающее ограничение $\varkappa = \alpha k$, имеет вид

$$v_{-}\sqrt{\gamma^2-1}\left[v_{||}\frac{\partial\theta}{\partial z} + v_{-}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial\theta}{\partial z}\sin\theta\right)\right] = \\ = H_{-}v_{||} - H_{||}v_{-}.$$

Соотношение же $(\mathbf{vH}) = \beta k$, т.е. $H_{||}v_{||} + H_{-}v_{-} = \beta|H_{-}v_{||} - H_{||}v_{-}|$, выполняется только тогда, когда $H_{||}/H_{-} = \lambda = \mathrm{const}$. Следовательно, искомое магнитное поле определяется формулами

$$H_{||} = \lambda H_{-} = \lambda\sqrt{\gamma^2-1}\frac{v_{-}}{v_{||} - \lambda v_{-}}\times \\ \times\left[v_{||}\frac{\partial\theta}{\partial z} + v_{-}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial\theta}{\partial z}\sin\theta\right)\right]. \tag{16}$$

Следует подчеркнуть, что формулы (16) определяют поле лишь на траектории частицы. Для того чтобы получить вид поля во всем пространстве, необходимо наложить на вектор напряженности магнитного поля условие $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$. Для выполнения этого условия достаточно, чтобы функция θ удовлетворяла уравнению

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial\theta}{\partial z}\sin\theta = 0. \tag{17}$$

Интегрирование (17) дает

$$\Phi(\theta, \lambda x - z\cos\theta, x\sin\theta - y\cos\theta) = 0, \tag{18}$$

где $\mathbf{\Phi}$ — произвольная функция указанных аргументов.

Таким образом, если исключить из (16) начальные условия $(v_{||}, v_{-}, \gamma)$, можно получить выражение для поля, допускающего траектории частиц, на которых уравнение БМТ имеет решение вида (11):

$$\mathbf{H} = H_0 \frac{\partial \theta}{\partial z} (\mathbf{e}_x \cos\theta + \mathbf{e}_y \sin\theta + \mathbf{e}_z \lambda). \qquad (19)$$

При этом $\theta(x, y, z)$ определяется в неявном виде формулой (18).

Для реализации интересующих нас траекторий необходимо и достаточно задать следующие начальные условия:

$$\dot{x}_0 = H_0 \cos\theta(x_0, y_0, z_0), \quad \dot{y}_0 = H_0 \sin\theta(x_0, y_0, z_0),$$
$$\dot{z}_0 = \sqrt{\gamma^2 - H_0^2 - 1}.$$

Частные случаи $H_{||} = 0$ $(\lambda = 0)$ и $H_{-} = 0$, $H_{||} = H_{||}(x, y)$ $(\lambda \to \infty)$ являются полями соответственно спирального и линейного магнитных ондуляторов. Движение спина в таких полях рассматривалось нами ранее [2]. Отметим, что в случае $H_{-} = 0$ траектории интересующего нас типа реализуются при произвольных начальных условиях.

Итак, в работе определен класс полей и найдены начальные условия для движения частицы, при которых существуют аналитические решения уравнений БМТ для произвольных γ и g. Показано, что в постоянных полях, удовлетворяющих соотношению $H_{||} = \lambda H_{-}$, достаточным условием такого представления решений является пропорциональность кривизны траектории и кручения.

Авторы благодарны В.Ч. Жуковскому, Б.А. Лысову и В.Г. Багрову за внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

Литература

1. *Лобанов А.Е., Павлова О.С.* // ТМФ. 1999. **121**, № 3. С. 509.
2. *Лобанов А.Е., Павлова О.С.* // Изв. вузов, Физика. 2000. № 1. С. 38.
3. *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
4. *Bargmann V., Michel L., Telegdi V.* // Phys. Rev. Lett. 1959. **2**. P. 435.
5. *Лобанов А.Е.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 2. С. 59 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 2. P. 85).

Поступила в редакцию
20.06.01

УДК 535.12.01

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В МОДЕЛИ ЗОММЕРФЕЛЬДА

Ал. А. Власов

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

E-mail: vlasov@srdlan.npi.msu.su

На примере модели Зоммерфельда рассмотрены новые решения задачи о движении протяженной заряженной частицы во внешних полях: туннелирование, циклотронное движение, рассеяние на кулоновском центре, броуновское движение. Выявлены отличия таких движений от классических.

В работе [1] были обсуждены проблемы классического движения излучающей точечной заряженной частицы, описываемой уравнением Лоренца–Дирака. Для их решения много лет назад были предложены различные модели классических «размазанных» (т. е. не точечных) частиц. Одной из таких моделей является модель Зоммерфельда жесткой сферы с радиусом a, массой m и зарядом Q [2] (частица Зоммерфельда; см. также п. 4 в работе [1]).

В так называемом квазистационарном приближении [3–6] уравнение движения протяженной частицы в рамках этой модели принимает вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \eta\left[\mathbf{v}(t - 2a/c) - \mathbf{v}(t)\right], \qquad (1)$$

где a — радиус сферы, $\eta = \frac{Q^2}{3ca^2}$, $\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt$, $\mathbf{R}$ — координата ее центра, $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ — внешняя сила.

В настоящей статье рассмотрены новые решения этого известного уравнения.

1. Туннелирование

Уравнение (1) имеет решения, которые можно интерпретировать как классическое туннелирование [7]. Физика такого эффекта проста: благодаря запаздыванию частица начинает «понимать», что подпадает под действие потенциальной силы слишком поздно, и проскакивает барьер.