УДК 519.6

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ К ТОЧНОМУ РЕШЕНИЮ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ НА МНОЖЕСТВЕ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

В. Н. Титаренко, А. Г. Ягола

(*кафедра математики*)

E-mail: yagola@inverse.phys.msu.su

Обобщаются результаты, полученные ранее, на множества ограниченных монотонных функций, имеющих счетное число точек разрыва первого рода на отрезке. Доказывается равномерная сходимость приближенных решений к точному на некотором подмножестве данного отрезка.

Введение

Важной особенностью некорректных задач является невозможность оценить погрешность приближенного решения или скорость его сходимости к точному. Поэтому очень важно найти в постановке задачи ту дополнительную (априорную) информацию, которая позволила бы оценить погрешность решения или сделать вывод о сходимости приближенного решения. В качестве такой информации, как показано в монографии [1], можно использовать информацию о монотонности или выпуклости решения. В настоящей работе делается попытка обобщить результаты, полученные в работе [2], на монотонные функции, имеющие на рассматриваемом отрезке счетное число точек разрыва первого рода. При этом указывается подмножество отрезка, на котором приближенное решение сходится равномерно к точному.

Пусть задачу нахождения точного решения можно записать в виде операторного уравнения

$$Az = \bar{u}, \tag{1}$$

где $A : Z \to U$ — линейный непрерывный инъективный оператор, а Z и U — линейные нормированные пространства. Пространство Z является пространством вещественных суммируемых функций $z(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$. Норма в пространстве Z вводится как $\|z\|_Z = \{\int_a^b |z(x)|^p dx\}^{1/p}$, где $p > 1$, т. е. $Z = L_p[a, b]$. Выбор же пространства U несуществен для рассматриваемой задачи.

Вместо точных оператора A и правой части $\bar{u}$ известны приближенные оператор A_h и правая часть u_δ такие, что $\forall z \in Z$: $\|A_h z - Az\|_U \leqslant h\|z\|_Z$, $\|u_\delta - \bar{u}\|_U \leqslant \delta$. Пусть в пространстве Z задано компактное множество M и известно, что точное решение $\bar{z}$ операторного уравнения (1) принадлежит множеству M. Если рассматривать $\eta = (h, \delta)$ как вектор погрешности рассматриваемой задачи, то, как показано в монографии [1], в качестве приближенного решения z_η операторного уравнения (1) можно взять любой элемент из множества $Z_M^\eta \equiv \{z \in M\colon\ \|A_h z - u_\delta\|_U \leqslant h\|z\|_Z + \delta\}$. Тогда $\forall z_\eta \in Z_M^\eta$: $\|z_\eta - \bar{z}\|_Z \to 0$ при $\eta \to 0$.

Функция $z_\eta(x)$ сходится к точному решению $\bar{z}(x)$ в пространстве $L_p[a, b]$, что для практических задач часто бывает не очень удобно. Поэтому желательно построить такие компакты M, что из сходимости в пространстве $L_p[a, b]$ следует поточечная сходимость функции $z_\eta(x)$ к функции $\bar{z}(x)$ на всем отрезке $[a, b]$.

Приведем некоторые теоремы, используемые в данной статье.

Теорема (Больцано–Вейерштрасса). *Из всякой ограниченной последовательности вещественных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Теорема (Кантора). *Непрерывная на сегменте функция равномерно непрерывна.*

Теорема из [3]. *Разность $\varphi(x) = z(x) - s(x)$ между неубывающей функцией $z(x)$ и ее функцией скачков $s(x)$ есть неубывающая и непрерывная функция.*

Докажем следующую простую лемму.

Лемма 1. *Пусть на не более чем счетном множестве E задана последовательность вещественных функций $\{z_n(x)\}$, ограниченных по модулю константой $C > 0$, т. е. $\forall x \in E$: $|z_n(x)| \leqslant C$. Тогда из последовательности $\{z_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$, сходящуюся в каждой точке множества E.*

Согласно теореме Больцано–Вейерштрасса, из последовательности $\{z_n\}$ можно выделить последовательность $\{z_n^{(1)}\}$, сходящуюся в произвольно выбранной точке $x_1 \in E$. Аналогично из последовательности $\{z_n^{(1)}\}$ можно выделить последовательность $\{z_n^{(2)}\}$, сходящуюся в точках $x_1, x_2 \in E$. Продолжаем процесс неограниченно и строим последовательность $z_1^{(1)}, z_2^{(2)}, \ldots, z_n^{(n)}, \ldots$, которая сходится в каждой точке множества E. ■

Монотонные функции

Пусть M — множество неубывающих на отрезке $[a,b]$ функций $z(x)$, ограниченных снизу и сверху константами C_1 и C_2, т.е. $\forall x \in [a,b]$: $C_1 \leqslant z(x) \leqslant C_2$.

Теорема 1. *Пусть на отрезке $[a,b]$ задана последовательность $\{z_n\}$ и элемент $\tilde z$ такие, что $z_n \in M \subset L_p[a,b]$, $\tilde z \in L_p[a,b]$, $\|z_n - \tilde z\|_{L_p} \to 0$ при $n \to \infty$, где $p \geqslant 1$. Тогда из последовательности $\{z_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$, сходящуюся в каждой точке на отрезке $[a,b]$ к функции $\hat z \in M$, при этом $\hat z = \tilde z$ почти всюду на $[a,b]$.*

Пусть множество E состоит из всех рациональных точек отрезка $[a,b]$ и точек a, b, если они иррациональны. Множество E — счетное множество. Согласно лемме 1, из последовательности $\{z_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$, сходящуюся в каждой точке множества E к некоторой функции $\hat z(x)$. Функция $\hat z(x)$ является неубывающей функцией на E. Предположим обратное, тогда $\exists x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$, $\exists \varepsilon > 0$: $\hat z(x_2) = \hat z(x_1) - 3\varepsilon$. В силу сходимости последовательности $\{z_{n_k}(x)\}$ в точках x_1, x_2 справедливо: $\exists N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n_k \geqslant N(\varepsilon)$: $z_{n_k}(x_2) \leqslant \hat z(x_2) + \varepsilon$, $\hat z(x_1) - \varepsilon \leqslant z_{n_k}(x_1)$. Из этого получаем, что $z_{n_k}(x_2) \leqslant \hat z(x_1) - 2\varepsilon \leqslant z_{n_k}(x_1) - \varepsilon < z_{n_k}(x_1)$, что противоречит неубыванию функций $z_{n_k}(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Распространим определение функции $\hat z(x)$ на весь отрезок $[a,b]$, положив $\hat z(x) = \sup\{\hat z(y)\colon y \in [a,x], y \in E\}$. Из этого определения следует, что $\hat z(x)$ является неубывающей на отрезке $[a,b]$ функцией и имеет не более чем счетное множество Q точек разрыва.

Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in (a,b)$, в которой функция $\hat z(x)$ непрерывна. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_1, x_2 \in E$, $x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2$: $\hat z(x_1) - \hat z(x_2) \leqslant \varepsilon$ и $\exists N(\varepsilon)$ $\forall n_k \geqslant N(\varepsilon)$: $|z_{n_k}(x_1) - \hat z(x_1)| \leqslant \varepsilon$, $|z_{n_k}(x_2) - \hat z(x_2)| \leqslant \varepsilon$. В силу неубывания $z_{n_k}(x)$ на $[a,b]$: $\hat z(x_1) - \varepsilon \leqslant z_{n_k}(x_0) \leqslant \hat z(x_2) + \varepsilon$, а в силу неубывания $\hat z(x)$ на $[a,b]$: $\hat z(x_0) - \varepsilon \leqslant \hat z(x_1)$, $\hat z(x_2) \leqslant \hat z(x_0) + \varepsilon$. Тогда $\hat z(x_0) - 2\varepsilon \leqslant z_{n_k}(x_0) \leqslant \hat z(x_0) + 2\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}(x_0) = \hat z(x_0)$.

Рассмотрим множество Q. Согласно лемме 1, из последовательности $\{z_{n_k}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{z_{n_l}\}$, сходящуюся во всех точках множества Q и, следовательно, на всем отрезке $[a,b]$. Переопределим, если нужно, функцию $\hat z(x)$ в точках множества Q как $\hat z(x) = \lim\limits_{l\to\infty} z_{n_l}(x)$. Доказательство неубывания функции $\hat z(x)$ проводится аналогично доказательству, проведенному для множества E. Так как $\|z_{n_l} - \hat z\|_{L_p} \to 0$, $l \to \infty$, и $\|z_n - \tilde z\|_{L_p} \to 0$, $n \to \infty$, то $\hat z = \tilde z$ в L_p, т.е. $\hat z(x) = \tilde z(x)$ почти всюду на $[a,b]$. ■

Замечание 1. Аналогичная теорема справедлива для невозрастающих функций.

Замечание 2. Для строго возрастающих (убывающих) функций рассмотренная теорема не имеет места. Пример: $[a,b] = [1,2]$, $z_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}$, $z_n \to 0$, т.е. убывающая функция сходится к постоянной функции.

Рассмотрим некоторую функцию $z(x)$ на отрезке $[a,b]$. Для любой внутренней точки x отрезка $[a,b]$ в курсе математического анализа (см., напр., [4]) вводятся понятия точки непрерывности, устранимой точки разрыва, точек разрыва первого и второго рода. Для крайних же точек a и b появляется неоднозначность с введением понятия устранимой точки разрыва и точки разрыва первого рода. Поэтому считаем, что точка a является устранимой точкой разрыва, если $\exists \lim\limits_{x\to a+0} z(x) \neq z(a)$. Таким образом, для точек a и b не будем применять понятие точки разрыва первого рода. Из этого следует, что все точки разрыва ограниченной монотонной функции на интервале (a,b) являются точками разрыва первого рода. Точки же a и b являются либо точками непрерывности справа и слева соответственно, либо устранимыми точками разрыва.

Лемма 2. *Последовательность $\{z_n(x)\}$ сходится к функции $\hat z(x)$ в каждой точке отрезка $[a,b]$, кроме, быть может, точек a, b и точек разрыва первого рода функции $\hat z(x)$.*

Если вся последовательность $\{z_n(x)\}$ сходится к функции $\hat z(x)$ в каждой точке отрезка $[a,b]$, то лемма доказана. В противном случае из последовательности $z_n(x)$ можно выделить две подпоследовательности: $\{z_{n_k}(x)\}$ и $\{z_{n_l}(x)\}$, сходящиеся к функциям $\hat z_1(x)$, $\hat z_2(x)$, не совпадающим на не более чем счетном множестве точек отрезка $[a,b]$.

Докажем, что функции $\hat z_1(x)$, $\hat z_2(x)$ имеют одни и те же точки разрыва первого рода. Предположим, что в некоторой точке разрыва x_0 функции $\hat z_2(x)$ функция $\hat z_1(x)$ непрерывна. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0+0} \hat z_2(x) = \hat z_1(x_0) + H^+$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} \hat z_2(x) = \hat z_1(x_0) + H^-$, $H^+ - H^- > 0$. В силу непрерывности $\hat z_2(x)$ в точке x_0 $\forall h > 0$ $\exists \delta(h) > 0$ $\forall x \in [x_0 - \delta(h), x_0 + \delta(h)]$: $|\hat z_1(x) - \hat z_1(x_0)| \leqslant h$. Так как $H^+ - H^- > 0$, то $\exists \bar h > 0$, для которого выполняется хотя бы одно из неравенств $H^+ - \bar h > 0$, $\bar h - H^- > 0$. При выполнении первого неравенства справедливы соотношения $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta(\bar h)]$: $\hat z_2(x) - \hat z_1(x_0) \geqslant H^+$, $\hat z_2(x) - \hat z_1(x) \geqslant H^+ - \bar h > 0$, $\|\hat z_2 - \hat z_1\|_{L_p} \geqslant (H^+ - \bar h)\{\delta(\bar h)\}^{1/p} > 0$. При выполнении второго неравенства $\forall x \in [x_0 - \delta(\bar h), x_0)$: $\hat z_2(x) - \hat z_1(x_0) \leqslant H^-$, $\hat z_2(x) - \hat z_1(x) \leqslant H^- - \bar h < 0$, $\|\hat z_2 - \hat z_1\|_{L_p} \geqslant (\bar h - H^-)\{\delta(\bar h)\}^{1/p} > 0$. Но эти неравенства противоречат равенству $\|\hat z_2 - \hat z_1\|_{L_p} = 0$. Таким образом, точки разрыва первого рода функций $\hat z_1(x)$ и $\hat z_2(x)$ совпадают.

Пусть $x_0 \in (a, b)$ — точка непрерывности функций $\hat{z}_1(x)$ и $\hat{z}_2(x)$. Предположим, что $\hat{z}_2(x_0) = \hat{z}_1(x_0) + H$, $H > 0$. В силу непрерывности функций $\hat{z}_2(x)$, $\hat{z}_1(x)$ $\forall h > 0$ $\exists \delta(h) > 0$ $\forall x \in [x_0 - \delta(h), x_0 + \delta(h)]$: $|\hat{z}_2(x) - \hat{z}_2(x_0)| \leqslant h$, $|\hat{z}_1(x) - \hat{z}_1(x_0)| \leqslant h$. Тогда $\exists \bar{h} < H/2$ такое, что $\forall x \in [x_0 - \delta(\bar{h}), x_0 + \delta(\bar{h})]$: $|\hat{z}_2(x) - \hat{z}_1(x)| \geqslant H - 2\bar{h} > 0$, $\|\hat{z}_2 - \hat{z}_1\|_{L_p} \geqslant (H - 2\bar{h})\{2\delta(\bar{h})\}^{1/p} > 0$. Это противоречит тому, что $\|\hat{z}_2 - \hat{z}_1\|_{L_p} = 0$. Лемма доказана. ■

Замечание 3. Функции $\hat{z}_1(x)$, $\hat{z}_2(x)$ могут отличаться в точках a, b и точках разрыва первого рода. Например, пусть на отрезке $[0, 1]$ определена последовательность $\{z_n\}$ такая, что $\forall k > 0$: $z_{2k-1}(x) = 1/k$, $z_{2k}(x) = \mathrm{e}^{-kx}$. Видно, что функции $\hat{z}_1(x) = \lim\limits_{k\to\infty} z_{2k-1}(x)$, $\hat{z}_2(x) = \lim\limits_{k\to\infty} z_{2k}(x)$ различаются только в точке 0: $\hat{z}_1(x) = 0$, $\hat{z}_2(x) = 1$ при $x = 0$ и $\hat{z}_1(x) = \hat{z}_2(x) = 0$ при $x \in (0, 1]$.

Рассмотрим все точки разрыва первого рода функции $\hat{z}(x)$ и точки a, b. Эти точки представляют собой не более чем счетное множество $Q = \{x_i\}_1^m$, $m \leqslant \infty$. Занумеруем все точки множества по возрастанию, т. е. если $x_i < x_j$, то $i < j$. Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ точки σ_i, τ_i, $i = \overline{1, m-1}$, такие, что $x_i < \sigma_i < \tau_i < x_{i+1}$, $i = \overline{1, m-1}$. Обозначим через Υ множество объединений $\bigcup\limits_{i=1}^{m-1} [\sigma_i, \tau_i]$ для различных допустимых σ_i, τ_i.

Т е о р е м а 2. *Последовательность функций $\{z_n(x)\}$ сходится равномерно на любом множестве $v \subset \Upsilon$.*

Функцию $\hat{z}(x)$ можно представить в виде суммы некоторой непрерывной неубывающей функции $\varphi(x)$ и функции ее скачков $s(x)$, т. е. $\hat{z}(x) = \varphi(x) + s(x)$. Функция скачков $s(x)$ постоянна на каждом из отрезков $[\sigma_i, \tau_i]$, а функция $\varphi(x)$ является равномерно непрерывной на $[a, b]$ по теореме Кантора.

Функция скачков $s(x)$ ограничена, так как ограничена функция $\hat{z}(x)$. Из этого следует, что $\forall \varepsilon > 0$ существует множество $Q_s(\varepsilon)$, состоящее из конечного числа $N_s(\varepsilon)$ точек разрыва функции $\hat{z}(x)$ таких, что сумма скачков во всех остальных точках разрыва меньше ε. Поэтому можно записать функцию скачков $s(x) = s_1(x) + s_2(x)$, где $s_1(a) = s_2(a) = 0$, $s_1(x) = [\hat{z}(a + 0) - \hat{z}(a)] + \sum\limits_{x_i < x} [\hat{z}(x_i + 0) - \hat{z}(x_i - 0)] + [\hat{z}(x) - \hat{z}(x - 0)]$, $x_i \in Q_s(\varepsilon)$, для $s_2(x)$ — $x_i \in Q \backslash Q_s(\varepsilon)$. При этом $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \leqslant x_2$: $0 \leqslant s_2(x_2) - s_2(x_1) \leqslant \varepsilon$. Для каждой точки разрыва $x_i \in Q_s(\varepsilon)$ рассмотрим отрезки $[\sigma_{i-1}, \tau_{i-1}]$ и $[\sigma_i, \tau_i]$. Если $x_i = a$ или $x_i = b$, то рассматриваем только один из этих отрезков. Составим объединение $v_\varepsilon = [\sigma_1, \tau_1] \cup \left(\bigcup\limits_{x_i \in Q_s(\varepsilon)} [\sigma_{i-1}, \tau_{i-1}] \cup [\sigma_i, \tau_i] \right) \cup \cup [\sigma_{m-1}, \tau_{m-1}]$, состоящее из конечного числа отрезков. Обозначим через $\tilde{v}_\varepsilon$ замыкание множества $[\sigma_1, \tau_{m-1}] \setminus \left(v_\varepsilon \cup \left(\bigcup\limits_{x_i \in Q_s(\varepsilon)} [\tau_{i-1}, \sigma_i] \right) \right)$. Если множество $\tilde{v}_\varepsilon \neq \varnothing$, то оно представляет собой объединение конечного числа отрезков. Так как множество v_ε состоит из конечного числа отрезков, то объединение $v_\varepsilon \cup \tilde{v}_\varepsilon$ тоже состоит из конечного числа отрезков.

Функция $\varphi(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$. Поэтому множество $v_\varepsilon \cup \tilde{v}_\varepsilon$ можно разбить конечным числом точек $\xi_j \notin Q$, $j = \overline{1, k}$, $0 < \xi_{j+1} - \xi_j < \delta(\varepsilon)$ так, что $\forall x \in v_\varepsilon \cup \tilde{v}_\varepsilon$ $\exists \xi_j, \xi_{j+1}$: $\xi_j \leqslant x \leqslant \xi_{j+1}$, $\varphi(x) - \varphi(\xi_j) \leqslant \varepsilon$. При этом в множество $\{\xi_i\}_1^k$ включаем и точки σ_i, τ_i для $x_i \in v_\varepsilon$. Поэтому если $x \in [\sigma_i, \tau_i] \subset v_\varepsilon$, то и $\xi_j, \xi_{j+1} \in [\sigma_i, \tau_i]$. Так как $s_2(x) = \text{const}$ на $\forall [\sigma_i, \tau_i] \subset v_\varepsilon$, то $s_2(x) - s_2(\xi_j) = 0$. Тогда $0 \leqslant \hat{z}(x) - \hat{z}(\xi_j) = (\varphi(x) - \varphi(\xi_j)) + (s_2(x) - s_2(\xi_j)) + (s_1(x) - s_1(\xi_j)) \leqslant \varepsilon + 0 + \varepsilon = 2\varepsilon$. Из леммы 2 в силу конечности числа k следует, что $\exists N(\varepsilon)$ $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$: $|z_n(\xi_j) - \hat{z}(\xi_j)| \leqslant \varepsilon$. Тогда получаем $|z_n(\xi_j) - \hat{z}(x)| \leqslant |z_n(\xi_j) - \hat{z}(\xi_j)| + |\hat{z}(\xi_j) - \hat{z}(x)| \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$, аналогично $|z_n(\xi_{j+1}) - \hat{z}(x)| \leqslant 3\varepsilon$. Учитывая, что $z_n(\xi_j) \leqslant z_n(x) \leqslant z_n(\xi_{j+1})$, находим, что $|z_n(x) - \hat{z}(x)| \leqslant 3\varepsilon$. Последнее неравенство справедливо для множества $v_\varepsilon \cup \tilde{v}_\varepsilon \supset v$, следовательно, оно справедливо и для v. ■

В работах [1, 2] была доказана теорема о том, что если точное решение $\bar{z}(x)$ операторного уравнения (1) является кусочно-непрерывной функцией, то имеет место равномерная сходимость последовательности приближенных решений к точному на каждом замкнутом отрезке, не содержащем точек разрыва функции $\bar{z}(x)$ и точек a, b. Теорема 2 обобщает этот результат на произвольное множество, являющееся объединением конечного или счетного числа таких отрезков.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 99-01-00447, 01-01-06166).

Литература

1. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
2. *Гончарский А.В., Ягола А.Г.* // ДАН СССР. 1969. **184**, № 4. С. 771.
3. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. СПб.: Лань, 1999.
4. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. 1. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию
12.09.01