

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145:535

О ПОСТРОЕНИИ ВЫСШИХ ПОПРАВОК К ПРИБЛИЖЕНИЮ
КРАМЕРСА–ХЕННЕБЕРГЕРА

О. В. Смирнова, Г. В. Смирнов

(кафедра атомной физики, физики плазмы и микроэлектроники)

E-mail: smirnova@mics.msu.su

Формальная аналогия между классическим методом осреднения и методом Крамерса–Хеннеберга приближенного описания динамики атомных систем в сильном монохроматическом поле используется для построения высших поправок к приближению Крамерса–Хеннеберга.

Введение

Идея метода Крамерса–Хеннеберга (КХ) [1–4] приближенного описания динамики атомных систем в сильном монохроматическом поле заключается в применении к исходному гамильтониану системы «атом + поле»

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V(\mathbf{x}) \quad (1)$$

(где*) $\mathbf{A} = A_0 \mathbf{e}_x \sin \omega t$, $A_0 = -Fc/e\omega$, $V(x)$ — атомный потенциал, \mathbf{p} — оператор импульса электрона) преобразования

$$S_{\text{КХ}} = \exp \left(\frac{ie}{\hbar c \mu} \mathbf{p} \int_0^t \mathbf{A}(t') dt' \right) \times \\ \times \exp \left(-\frac{ie^2}{2\hbar \mu c^2} \int_0^t A^2(t') dt' \right)$$

[1], приводящего гамильтониан (1) к следующему виду:

$$H_{\text{КХ}} = \frac{p^2}{2\mu} + V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_x a_e \cos \omega t), \quad (2)$$

где m и e — масса и заряд электрона, $a_e = F/m\omega^2$ — амплитуда осцилляций свободного электрона в поле с напряженностью $E = F/e$ и частотой ω . В приближении КХ в гамильтониане (2) зависящий от времени потенциал заменяется средним за период значением $V_{\text{КХ}}(\mathbf{x}, a_e)$ — потенциалом КХ. Приближение КХ справедливо и продуктивно, если поправка $\Delta V = V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_x a_e \cos \omega t) - V_{\text{КХ}}(\mathbf{x}, a_e)$ несущественна. В этом случае все необходимые величины, например скорости ионизации, поляризуемости, могут быть вычислены по теории возмущений, а энергии стационарных состояний хорошо аппроксимируют точные квазиэнергии системы.

*) В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением поля линейной поляризации.

Целью настоящей работы является представление гамильтониана КХ

$$H_{\text{КХ}} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta - V_0 f_0(\mathbf{x}, \delta) - V_0 \sum_n f_n(\mathbf{x}, \delta) \cos n\omega t, \quad (3)$$

$$f_n(\mathbf{x}, \delta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathbf{x} + \mathbf{e}_x \delta^{-1} \cos \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \\ \delta = a/a_e, \quad (4)$$

где a — характерный размер для исходного потенциала, в виде асимптотического ряда по параметрам, контролирующим применимость приближения КХ [5], и обсуждение физического смысла высших поправок к приближению КХ.

В рамках формализма КХ можно описать два принципиально различных режима: режим теории возмущений и режим стабилизации. В пределе $\delta \gg 1$ реализуется режим теории возмущений: основные динамические характеристики атома (поляризуемость [6, 7], скорость ионизации [2]), вычисленные с использованием гамильтониана КХ при $\delta \gg 1$, совпадают с аналогичными величинами, вычисленными с использованием исходного гамильтониана (1) по стандартной теории возмущений [8]. Противоположный предел соответствует режиму стабилизации, поскольку скорость ионизации, вычисленная в приближении КХ в случае $\delta \ll 1$, убывает с увеличением интенсивности [9, 10].

Изучение области $\delta \gg 1$ интересно с методической точки зрения, так как в этой области возможно сопоставление результатов, полученных в формализме КХ и в рамках других подходов. Такое сопоставление позволяет выявить физический смысл формальных конструкций — потенциала КХ, собственных функций и собственных значений гамильтониана КХ, поправок к приближению КХ.

Вычислим величину сдвига уровня m , соответствующего невозмущенному состоянию $|m\rangle$, который обусловлен действием поля в случае $\delta \gg 1$. В работах [6, 7] для кулоновского потенциала по-

казано, что положение уровня в потенциале КХ отражает величину штарковского сдвига в высокочастотном пределе. Ограничимся для простоты обсуждением одномерных систем с гладким потенциалом $V_0 f(x/a)$, чтобы не рассматривать случай вырожденных уровней. Следуя схеме, предложенной в работе [7], разложим потенциал $V_0 f(x/a + \delta^{-1} \cos \omega t)$ в ряд по δ^{-1} , вычислим потенциал КХ:

$$f_0(x, \delta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{x}{a} + \delta^{-1} \cos \varphi\right) d\varphi$$

и определим энергию уровня в потенциале КХ:

$$E_m^{\text{КХ}} = \left\langle m^{\text{КХ}} \left| \frac{p^2}{2} - V_0 f_0\left(\frac{x}{a}, \delta\right) \right| m^{\text{КХ}} \right\rangle,$$

ограничиваясь членами, квадратичными по полю:

$$E_m^{\text{КХ}} = E_m + \frac{1}{4\omega^2} \left[1 - \frac{V_0}{\omega^2} \langle m | f''\left(\frac{x}{a}\right) | m \rangle \right] F^2, \quad (5)$$

где E_m — энергия невозмущенного уровня. Здесь и далее, если не сказано иное, используются атомные единицы ($\mu = e = \hbar = 1$). При вычислении (5) учтено, что в рассматриваемом случае ($\delta \gg 1$)

$$|m^{\text{КХ}}\rangle = |m\rangle + \frac{\delta^{-2}}{4} V_0 a^2 \sum_{l, l \neq m} \frac{\langle l | f'' | m \rangle}{E_m - E_l} |l\rangle + O(\delta^{-4}).$$

Высокочастотное разложение динамической поляризуемости

$$\alpha(\omega) = \sum_k \frac{2x_{mk}^2 \omega_{km}}{\omega_{km}^2 - \omega^2}, \quad (6)$$

определяющей квадратичный по полю сдвиг невырожденных уровней $\Delta E_m = -\frac{1}{4} \alpha(\omega) F^2$, хорошо известно [11]:

$$\alpha(\omega) = -\frac{1}{\omega^2} + \frac{V_0}{\omega^4} \langle m | f''\left(\frac{x}{a}\right) | m \rangle - \frac{V_0^2}{\omega^6} \langle m | \left\{ f''\left(\frac{x}{a}\right) \right\}^2 | m \rangle + O\left(\frac{1}{\omega^8}\right). \quad (7)$$

Сопоставляя выражения (5) и (7), получим, что положение уровня в потенциале КХ аппроксимирует величину штарковского сдвига с точностью до ω^{-4} . Таким образом, возникает задача о построении поправок к потенциалу КХ, описывающих остальные члены в высокочастотном разложении динамической поляризуемости; иначе говоря, сформулирована обратная задача теории штарковского сдвига — определение потенциала по спектру состояний, изменившихся за счет эффекта Штарка. Известно, что в классической теории такая задача может быть

решена однозначно, только если искомая функция (потенциальная энергия) — четная функция координаты [12].

1. Асимптотическое разложение функции Гамильтона в классической механике

Аппарат метода осреднения [13] позволяет привести неавтономную гамильтонову систему к автономному виду при помощи ограниченных при любом времени t преобразований. Запишем уравнения Гамильтона исследуемой системы после преобразования КХ (это преобразование определено и в классической механике [14–17]) в безразмерных единицах $\mu = V_0 = a = 1$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\theta} = \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\theta} = -\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \mathbf{x}}, \quad (8)$$

$$\tilde{H}_0 = \varepsilon_\omega \left(\frac{p^2}{2} - f_0(\mathbf{x}, \delta) - \sum_n f_n(\mathbf{x}, \delta) \cos n\theta \right), \quad (9)$$

$$\tilde{H}_0 = \varepsilon_\omega H_0,$$

где выражения для функций $f_n(\mathbf{x}, \delta)$ заданы формулой (4), $\varepsilon_\omega = \Omega/\omega$, $\theta = \tau/\varepsilon_\omega$, $\tau = \Omega t$, $\Omega = \sqrt{V_0/\mu a^2}$. Потребуем малости ε_ω и представим функцию Гамильтона \tilde{H}_0 в виде ряда по ε_ω с помощью последовательного применения канонических преобразований, осуществляющих переход от переменных $\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j$ к переменным $\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{p}_{j+1}$. Канонические преобразования заданы производящими функциями вида

$$F_{j+1}(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_{j+1}, t) = \mathbf{x}_j \mathbf{p}_{j+1} + \varepsilon_\omega S_{j+1}(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_{j+1}, t), \quad (10)$$

$$\mathbf{x}_{j+1} = \frac{\partial F_{j+1}}{\partial \mathbf{p}_{j+1}}, \quad \mathbf{p}_j = \frac{\partial F_{j+1}}{\partial \mathbf{x}_j}, \quad (11)$$

$$\tilde{H}_{j+1}(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{p}_{j+1}, \theta) = \tilde{H}_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j, \theta) + \frac{\partial F_{j+1}}{\partial \theta}.$$

Применяя преобразование (10), (11) и выбирая функции $S_{j+1}(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_{j+1}, t)$ согласно соотношениям $\varepsilon_\omega \frac{\partial S_{j+1}(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_{j+1}, \theta)}{\partial \theta} = -X_j$, где X_j — все члены функции Гамильтона, обращаются в нуль при усреднении по периоду в $(j+1)$ -м порядке по ε_ω , приведем исходную функцию Гамильтона (9) к следующему виду:

$$H_j = \frac{p_j^2}{2} - f_0(\mathbf{x}_j, \delta) + \varepsilon_\omega^2 A_1(\mathbf{x}_j, \delta) + \varepsilon_\omega^4 A_2(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j, \delta) + \dots + O(\varepsilon_\omega^{j+1}).$$

Для примера выпишем производящие функции F_1, F_2 первых двух преобразований, осуществляющих переход от переменных \mathbf{x}, \mathbf{p} к переменным

ным $\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2$, которые определяют функцию $A_1 = \sum_n \frac{1}{4n^2} [\nabla f_n(\mathbf{x}, \delta)]^2$:

$$F_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1, \theta) = \mathbf{x}\mathbf{p}_1 + \varepsilon_\omega S_1(\mathbf{x}, \theta), \quad (12)$$

где $S_1(\mathbf{x}, \theta) = \sum_n \frac{1}{n} f_n(\mathbf{x}, \delta) \sin n\theta$,

$$F_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_2, \theta) = \mathbf{x}_1\mathbf{p}_2 + \varepsilon_\omega S_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_2, \theta),$$

где $S_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_2, \theta) = \varepsilon_\omega \sum_n \frac{1}{2n^2} (\mathbf{p}_2 \nabla f_n(\mathbf{x}_1, \delta) + \nabla f_n(\mathbf{x}_1, \delta) \mathbf{p}_2) \cos n\theta$.

Ранее поправка A_1 к потенциалу КХ в рамках классической механики была получена в работе [17].

2. Асимптотическое разложение гамильтониана в квантовой механике

Преобразования, проведенные в предыдущем параграфе, могут быть обобщены на случай квантовых систем. Запишем уравнение Шрёдингера для исходной системы после преобразования КХ в безразмерных единицах $\mu = V_0 = a = 1$:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \tilde{H} \Psi, \quad (13)$$

$$\tilde{H} = \varepsilon_\omega \left(\frac{p^2}{2} - f_0(\mathbf{x}, \delta) - \sum_n f_n(\mathbf{x}, \delta) \cos n\theta \right),$$

где $\varepsilon_\omega = \Omega/\omega$, $\theta = \tau/\varepsilon_\omega$, $\tau = \Omega t$, $\Omega = \sqrt{V_0/\mu a^2}$, $\hbar = \hbar\Omega/V_0$.

Преобразование U_{j+1} , соответствующее каноническому преобразованию (10), (11), имеет вид

$$U_{j+1} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon_\omega \int_0^\theta X_j(\theta') d\theta' \right\},$$

где $X_j(\theta)$ — все члены гамильтониана, определенного соотношением

$$\tilde{H}_j = U_j \tilde{H}_{j-1} U_j^\dagger + i \frac{\partial U_j}{\partial t} U_j^\dagger,$$

которое обращается в нуль при усреднении по периоду в $(j+1)$ -м порядке по ε_ω . При этом волновая функция преобразуется по закону $\Psi_{j+1} = U_{j+1}^\dagger \Psi_j$.

Преобразование U_1 имеет следующий вид:

$$U_1 = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon_\omega \sum_n \frac{1}{n} f_n \sin n\theta \right\}.$$

Подставляя в уравнение (13) волновую функцию Ψ в виде $\Psi = U_1 \Psi_1$, получим уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} = \tilde{H}_1 \Psi_1,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 = & \varepsilon_\omega \left(\frac{p^2}{2} - f_0(\mathbf{x}, \delta) - \right. \\ & - \varepsilon_\omega \sum_n \frac{1}{2n^2} (\mathbf{p} \nabla f_n(\mathbf{x}, \delta) + \nabla f_n(\mathbf{x}, \delta) \mathbf{p}) \sin n\theta + \\ & \left. + \varepsilon_\omega^2 A_1 + \varepsilon_\omega^2 \sum_{\substack{n,l \\ n \neq l}} \frac{1}{l(l-n)} \nabla f_l(\mathbf{x}, \delta) \nabla f_{l-n}(\mathbf{x}, \delta) \cos n\theta + \right. \\ & \left. + O(\varepsilon_\omega^3) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что гамильтониан (14) совпадает с функцией Гамильтона \tilde{H}_1 , которая получена после осуществления канонического преобразования, заданного функцией F_1 (12). Применение преобразования U_2 с учетом разложения Хаусдорфа

$$\begin{aligned} e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = & \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots = \\ = & \sum_n \frac{1}{n!} [\hat{A} [\hat{A}, \dots [\hat{A}, \hat{B}] \dots]] \end{aligned}$$

не приводит к возникновению поправок к потенциалу A_1 , т.е. все члены гамильтониана \tilde{H}_2 , не обращающиеся в нуль при усреднении по периоду, имеют более высокий порядок малости по ε_ω , чем A_1 . Таким образом, гамильтониан \tilde{H}_2 можно записать в виде

$$\tilde{H}_2 = \varepsilon_\omega \left(\frac{p^2}{2} - f_0(\mathbf{x}, \delta) + \varepsilon_\omega^2 A_1 + \varepsilon_\omega^2 X_2 + O(\varepsilon_\omega^3) \right),$$

а модифицированный потенциал КХ описывается выражением вида

$$-f_0(\mathbf{x}, \delta) + \varepsilon_\omega^2 \sum_n \frac{1}{4n^2} [\nabla f_n(\mathbf{x}, \delta)]^2 \quad (15)$$

и не содержит специфических квантовых поправок. Структура потенциала (15) обсуждается в работе [17].

3. Положение уровня энергии в модифицированном потенциале КХ

Определим положение уровня $|m_2\rangle$ в модифицированном потенциале (15) в случае $\delta \gg 1$ для одномерных систем, вычисляя матричный элемент вида

$$\langle m_2 | \frac{p^2}{2} - f_0(x, \delta) + \varepsilon_\omega^2 \sum_n \frac{1}{4n^2} [f_n(x, \delta)]^2 | m_2 \rangle$$

и ограничиваясь членами, квадратичными по полю:

$$E_{m_2}^{\text{KH}} = E_m + \frac{1}{4\omega^2} \times \left[1 - \frac{V_0}{\omega^2} \langle m | f'' \left(\frac{x}{a} \right) | m \rangle + \frac{V_0^2}{\omega^4} \langle m | \left\{ f'' \left(\frac{x}{a} \right) \right\}^2 | m \rangle \right] F^2, \quad (16)$$

где E_m — энергия невозмущенного уровня $|m\rangle$. Здесь учтено, что в случае $\delta \gg 1$ поправки f_n (4) имеют вид $f_n = \frac{\delta^{-n}}{2^{n-1}n!} f^{(n)} + O(\delta^{-n-1})$ ($n \neq 0$). Выражение (16) записано в атомных единицах. Сопоставляя (7) и (16), получим, что положение уровня в потенциале (15) аппроксимирует величину квадратичного штарковского сдвига невырожденного уровня в высокочастотном поле линейной поляризации с точностью до ω^{-6} .

Заключение

Формальная аналогия метода КХ и метода осреднения использована для построения высших поправок к приближению КХ.

Показано, что учет первой исчезающей поправки к потенциалу КХ по (Ω/ω) в случае $\delta \gg 1$ определяет модифицированный потенциал КХ, положение энергетических уровней в котором аппроксимирует величину квадратичного штарковского сдвига невырожденного уровня в высокочастотном поле линейной поляризации с точностью до ω^{-6} включительно.

Авторы благодарны Р.В. Карапетяну, А.М. Попову и М.В. Федорову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-02-16046).

Литература

1. *Kramers H.A.* Les Particules Élémentaires: Report to the Eighth Solvay Conf. Brussels: Editions Stoops, 1950.
2. *Henneberger W.C.* // Phys. Rev. Lett. 1968. **21**. P. 838.
3. *Burnnett K., Reed V.C., Knight P.L.* // J. Phys. B. 1993. **26**. P. 561.
4. *Делоне Н.Б., Крайнов В.П.* // УФН. 1995. **165**. С. 1295.
5. *Смирнова О.В.* // ЖЭТФ. 2000. **117**. С. 702.
6. *Pont M., Gavrila M.* // Phys. Lett. 1987. **A123**. P. 469.
7. *Ропов А.М., Тихонова О.В., Волкова Е.А.* // Laser Phys. 2000. **10**, No. 1 (in press).
8. *Делоне Н.Б., Крайнов В.П.* Атом в сильном световом поле. М.: Энергоатомиздат, 1984 (*Delone N.B., Krainov V.P.* Multiphoton Processes in Atoms. Heidelberg: Springer-Verlag, 1994).
9. *Pont M., Gavrila M.* // Phys. Rev. Lett. 1990. **65**. P. 2362.
10. *Волкова Е.А., Попов А.М., Смирнова О.В.* // ЖЭТФ. 1994. **106**. С. 1360.
11. *Elyutin P.V.* // Phys. Lett. 1997. **A233**, No. 3. P. 175.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1988.
13. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988.
14. *Grochmalicki J., Lewenstein M., Rzaewski K.* // Phys. Rev. Lett. 1991. **66**, No. 8. P. 1038.
15. *Benvenuto F., Casati G., Shepelyansky D.L.* // Phys. Rev. 1993. **A47**, No. 2. P. R786.
16. *Casati G., Guarneri I., Mantica G.* // Phys. Rev. 1994. **A50**, No. 6. P. 5018.
17. *Karapetyan R.V.* // Laser Physics. 2000. **10**. P. 160.

Поступила в редакцию
21.02.01

УДК 539.186.2

РОЛЬ СПИНОВЫХ ПРАВИЛ ОТБОРА В КОГЕРЕНТНОМ ФОТОРОЖДЕНИИ η -МЕЗОНОВ НА ЯДРАХ В ОБЛАСТИ БАРИОННЫХ РЕЗОНАНСОВ

М. М. Каскулов, А. В. Бибилов

(НИИЯФ)

E-mail: kaskulov@mail.ru

Когерентное фоторождение η -мезонов на ядрах с $J = T = 0$ рассматривается с точки зрения доминирующей роли правил отбора, накладываемых спиновой структурой вершинных функций на процесс возбуждения и распада $S_{11}(1535)$ - и $D_{13}(1520)$ -резонансных субнуклонных степеней свободы ядра.

Введение

Интенсивное теоретическое исследование когерентного фоторождения η -мезонов на ядрах с замкнутыми оболочками (с нулевым полным спином и изоспином), которое ведется уже на протяжении нескольких лет [1–5], связано в первую очередь с началом активного систематического эксперимен-

тального изучения указанной реакции [6, 7]. Основная проблема, которая объединяет различные теоретические подходы к изучению когерентного фоторождения η -мезонов, состоит в том, что вопреки сильной связи $S_{11}(1535)$ -резонанса в канале $N + \eta$ и его доминирующей роли в элементарном процессе фоторождения η на нуклоне вклад этого