УДК 519.246,524

# АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЕ ПОДАВЛЕНИЕ ШУМА ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ СЛАБЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ИМПУЛЬСОВ

**А. В. Гусев**

(*ГАИШ*)

E-mail: avg@sai.msu.su

**Предложен амплитудно-частотный алгоритм обнаружения слабых гравитационных импульсов на фоне негауссовских шумов резонансных гравитационных антенн. Обработка гравитационных данных проводится по схеме «безынерционный нелинейный элемент – оптимальный линейный фильтр – сумматор».**

**1.** При комплексной системе обработки информации [1], полученной с помощью криогенных резонансных гравитационных антенн (ГА), необходимо учитывать, что аддитивная помеха на выходе таких систем представляет собой негауссовский узкополосный случайный процесс. При обнаружении в одночастотном режиме слабых гравитационных импульсов (ГИ) по дискретной выборке с независимыми отсчетами можно использовать [2] локально оптимальный алгоритм обработки [3, 4] гравитационных данных по схеме «безынерционный нелинейный элемент (БНЭ) – сумматор». Характеристика БНЭ определяется одномерной плотностью вероятности помехи на выходе линейного тракта ГА.

В настоящей работе рассматривается возможность применения амплитудно-частотных методов подавления аддитивных шумов [4, 5] для обнаружения слабых ГИ. Обработка гравитационных данных проводится по схеме «БНЭ – оптимальная линейная система – сумматор». Характеристика БНЭ выбирается таким образом, чтобы обеспечить максимум отношения сигнал-шум на выходе такого устройства.

**2.** В состав современных резонансных ГА входит дополнительный элемент — трансформатор смещения. Такое устройство представляет собой механический аналог трансформатора импеданса в теории электрических цепей. При обобщенном анализе ГА с трансформатором смещения можно рассматривать как линейную систему с двумя степенями свободы. Результирующий процесс $x(t)$ на выходе линейного тракта ГА представляет собой суперпозицию двух квазигармонических колебаний:

$$x_m(t) = \lambda s_m(t) + n_m(t), \quad t \in (0, T),$$

где $\lambda$ — случайная величина, принимающая на интервале наблюдения $(0, T)$ два возможных значения: $\lambda = 1$ при наличии ГИ и $\lambda = 0$ при их отсутствии, $s_m(t)$ и $n_m(t)$ — полезный сигнал и аддитивная помеха в одночастотном режиме, $m = 1, 2$. Начальные фазы узкополосных процессов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ считаются случайными величинами.

При амплитудно-частотном подавлении аддитивных помех обработке подвергается реализация векторного случайного процесса $\mathbf{E}(t) = [E_1(t)\, E_2(t)]^T$, где $E_1(t)$ и $E_2(t)$ — квадраты огибающих узкополосных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Пусть $f[E_1, E_2]$ — двумерная характеристика БНЭ; $W_2(E_1, E_2, A_1^2, A_2^2)$ — совместная плотность вероятности случайных процессов $E_1(t)$ и $E_2(t)$ в совпадающие моменты времени, зависящая (при случайных начальных фазах) только от огибающих $A_1(t)$ и $A_2(t)$ узкополосных колебаний $s_1(t)$ и $s_2(t)$; $\langle \ldots \rangle$ — символическая форма записи оператора статистического усреднения,

Тогда среднее значение случайного процесса $y(t) = f[E_1(t), E_2(t)]$ на выходе БНЭ устройства определяется следующей формулой:

$$\langle y(t)|\lambda\rangle = \int_0^\infty\int_0^\infty f[E_1, E_2] W_2(E_1, E_2, \lambda A_1^2, \lambda A_2^2) dE_1 dE_2.$$

При обнаружении слабых ГИ, разлагая совместную плотность вероятности $W_2(E_1, E_2, A_1^2, A_2^2)$ в ряд Тейлора по степеням малых энергетических параметров $A_1^2$ и $A_2^2$, получим

$$\begin{aligned}\langle y(t)|\lambda\rangle &\approx \langle f[E_1, E_2]\,|\lambda = 0\rangle + \\ &+ \lambda \sum_{m=1}^{2} \left\langle A_m^2(t)\right\rangle \langle f[E_1, E_2] f_m[E_1, E_2]\,|\lambda = 0\rangle .\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь

$$f_m[E_1, E_2] = \left[\frac{\partial \ln W_2(E_1, E_2, A_1^2, A_2^2)}{\partial A_m^2}\right]_{A_1^2 = A_2^2 = 0}. \tag{2}$$

При дальнейшем анализе будем предполагать, что $\langle f[E_1, E_2]|\lambda = 0\rangle = 0$ [4], а огибающие $A_1(t)$ и $A_2(t)$ в первом приближении одинаковы: $A_1^2(t) \approx \approx A_2^2(t) \approx A^2(t)$. Учитывая выражения (1) и (2), получим

$$\langle y(t)|\lambda\rangle \approx \lambda \left\langle A^2(t)\right\rangle \left\langle f[E_1,E_2]\,\gamma[E_1,E_2]|\lambda=0\right\rangle,$$
$$\gamma[E_1,E_2]=\sum_{m=1}^{2} f_m[E_1,E_2]. \qquad (3)$$

Выражение (3) позволяет представить случайный широкополосный процесс $y(t)$ на выходе БНЭ в виде линейной суперпозиции:

$$y(t)=\lambda s(t)+n(t), \quad t\in(0,T),$$

полезного сигнала $s(t)=\langle y(t)|\lambda=1\rangle$ и аддитивной помехи $n(t)\approx y(t|\lambda=0)$ с нулевым средним значением и дисперсией $D\approx\left\langle y^2(t)|\lambda=0\right\rangle=\left\langle f^2[E_1,E_2]|\lambda=0\right\rangle$. Полезный сигнал $s(t)$ сохраняет структуру огибающей $A(t)$ отклика ГА на внешнее возмущение.

Учитывая выражение (3), находим отношение сигнал-шум $q(t)$ (по мощности) на выходе БНЭ при однократном наблюдении:

$$q(t)=\frac{s^2(t)}{D}=\left\langle A^2(t)\right\rangle^2 \frac{\langle f[E_1,E_2]\gamma[E_1,E_2]|\lambda=0\rangle^2}{\langle f^2[E_1,E_2]|\lambda=0\rangle}.$$

При оптимальной характеристике БНЭ $f[E_1,E_2]=\tilde f[E_1,E_2]$ отношение сигнал-шум $q$ достигает максимальной величины $q=q_{\max}$. Воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского, получим

$$q(t)=q_{\max}(t)=\left\langle A^2(t)\right\rangle^2 I, \quad I=\left\langle \gamma^2[E_1,E_2]|\lambda=0\right\rangle,$$
$$\tilde f[E_1,E_2]=c_0\gamma[E_1,E_2]=c_0\sum_{m=1}^{2} f_m[E_1,E_2], \qquad (4)$$

где $c_0$ — произвольный масштабный коэффициент (при дальнейшем анализе $c_0=1$).

**3.** При гауссовских шумах на выходе линейного тракта ГА случайные процессы $n_1(t)$ и $n_2(t)$ статистически независимы. Поэтому при гауссовской модели аддитивных помех совместная плотность вероятности $W_2(E_1,E_2,A_1^2,A_2^2)$ может быть представлена в виде

$$\left[W_2(E_1,E_2,A_1^2,A_2^2)\right]_{\text{Gauss}}= = W_1(E_1,A_1^2,\sigma_1^2)W_1(E_2,A_2^2,\sigma_2^2), \qquad (5)$$

где $\sigma_1^2=\left\langle n_1^2(t)\right\rangle$ и $\sigma_2^2=\left\langle n_2^2(t)\right\rangle$ — дисперсии гауссовских случайных процессов $n_1(t)$ и $n_2(t)$,

$$W_1(E,A^2,\sigma^2)= =(2\sigma^2)^{-1}\exp\left\{-(E+A^2)/(2\sigma^2)\right\} I_0\left(A\sqrt{E}/\sigma^2\right) \qquad (6)$$

— плотность вероятности Релея–Райса: $I_0(x)=1+x^2/4+\ldots$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Для негауссовских случайных процессов $n_1(t)$ и $n_2(t)$ совместная плотность вероятности $W_2(E_1,E_2,A_1^2,A_2^2)$ неизвестна. При адаптивном приеме в условиях априорной недостаточности характеристика БНЭ может быть вычислена по параметрической оценке этой плотности вероятности. Учитывая формулу (5) и воспользовавшись методом рандомизации [6], находим оценку неизвестной плотности вероятности $W_2(E_1,E_2,A_1^2,A_2^2)$ при полигауссовской аппроксимации [3]:

$$\widehat{W}_2(E_1,E_2,A_1^2,A_2^2)= =\sum_l p_l W_1\left(E_1,A_1^2,\sigma_{1l}^2\right) W_1\left(E_2,A_2^2,\sigma_{2l}^2\right), \qquad (7)$$

где $0\leqslant p_l\leqslant 1$ — весовые коэффициенты, $\sum_l p_l=1$, $\sigma_{1l}^2$ и $\sigma_{2l}^2$ — характерные параметры.

Учитывая выражения (2), (5), (6) и (7), при полигауссовской аппроксимации плотности вероятности шума на выходе ГА получим

$$f_m[E_1,E_2]= =\left\{\sum_l p_l W_1(E_1,0,\sigma_{1l}^2)W_1(E_2,0,\sigma_{2l}^2)(2\sigma_{ml}^2)^{-1}\times \times\left[E_m/\left(2\sigma_{ml}^2\right)-2\right]\right\}\times \times\left[\sum_l p_l W_1\left(E_1,0,\sigma_{1l}^2\right)W_1\left(E_2,0,\sigma_{2l}^2\right)\right]^{-1}. \qquad (8)$$

Формула (8) определяет структуру нелинейных преобразователей в отдельных каналах двухканального БНЭ с оптимальной характеристикой. Параметры плотности вероятности (7) при обнаружении слабых ГИ можно найти по неклассифицированным реализациям случайных процессов $E_1(t)$ и $E_2(t)$.

При бигауссовской аппроксимации ($l=2$) аддитивная помеха на выходе линейного тракта ГА рассматривается как аномально-засоренный гауссовский случайный процесс. Характерные параметры такого процесса $\sigma_{11}^2$, $\sigma_{12}^2$, $\sigma_{21}^2$, $\sigma_{22}^2$, $p_1=(1-p)$, $p_2=p$, где $p$ — вероятность появления аномалии в произвольный момент времени, можно определить [3] по выборочным начальным моментам $m_\nu^*\{E_{1,2}\}$, $\nu=1,2,3$, случайных процессов $E_1(t)$ и $E_2(t)$.

**4.** Пусть

$$\tilde y(t)=\tilde f[E_1(t),E_2(t)]=\lambda\tilde s(t)+\tilde n(t), \quad t\in(0,T),$$

— случайный процесс на выходе БНЭ с оптимальной характеристикой (4), представляющий собой аддитивную смесь полезного сигнала $\tilde s(t)$ и стационарной помехи $\tilde n(t)$. При амплитудно-частотной обработке реализация этого случайного процесса поступает на вход оптимальной линейной системы, максимизирующей отношение сигнал-шум [4, 7]. Передаточная функция $K_\omega(j\omega)$ такой системы определяется следующим выражением:

$$K_\omega(j\omega) = K_0\,[\tilde{s}^*_\omega(j\omega)/B(\omega)]\exp\{-j\omega t_d\}\,, \qquad (9)$$

где $\tilde{s}_\omega(j\omega) \leftrightarrow \tilde{s}(t)$, $B(\omega)$ — спектральная плотность аддитивной помехи $\tilde{n}(t)$, $K_0$ — произвольный масштабный коэффициент, $t_d$ — временная задержка.

Будем предполагать, что гравитационный сигнал на входе ГА представляет собой последовательность редких $\delta$-импульсов со случайными независимыми амплитудами и моментами возникновения $\tau_k$. Для оценки априори неизвестных параметров $\tau_k$ при поиске гамма-гравитационной корреляции используется комплексная система обработки информации [1]. Для такой модели полезного сигнала имеем $A(t) = a_k\sum\limits_k g_0(t-\tau_k)$, где $g_0(t)$ — нормированная огибающая импульсной характеристики линейного тракта ГА в одночастотном режиме, $0 \leqslant g_0(t) \leqslant g_0(0) = 1$, $a_k$ — амплитуда отдельного ГИ. Тогда, учитывая выражение (3), находим:

$$\tilde{s} = \sum_k \tilde{s}_k(t), \qquad \tilde{s}_k(t) = \langle a_k^2\rangle\, I g_0^2(t-\tau_k).$$

Учитывая, что передаточная функция оптимальной системы определена с точностью до произвольного масштабного коэффициента, из выражения (9) получим

$$K_\omega(j\omega) = K_{1\omega}(j\omega)K_{2\omega}(j\omega). \qquad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_{1\omega}(j\omega) &= K_0\frac{u^*_\omega(j\omega)}{B(\omega)}\exp\{-j\omega t_d\}\,,\\ K_{2\omega}(j\omega) &= \sum_k \exp\{-j\omega\tau_k\}\,. \end{aligned} \qquad (11)$$

Из анализа выражений (10) и (11) следует, что при амплитудно-частотном обнаружении слабых ГИ оптимальная линейная система на выходе БНЭ может быть реализована в виде последовательно включенных оптимального линейного фильтра (ОФ) с передаточной функцией $K_{1\omega}(j\omega)$ и сумматора с передаточной функцией $K_{2\omega}(j\omega)$. ОФ максимизирует отношение сигнал-шум при обнаружении отдельного ГИ. При оптимальном моменте наблюдения $t = t_d$ [4] случайный процесс на выходе оптимальной системы достигает величины $Z = \sum\limits_k z(\tau_k)$, где $z(t) = y_{\mathrm{opt}}(t) * K_1(t)$ — случайный процесс на выходе ОФ с импульсной характеристикой $K_1(t) \leftrightarrow K_{1\omega}(\omega)$.

Применение дополнительного ОФ, расположенного после БНЭ, позволяет увеличить отношение сигнал-шум относительно системы [2] без ОФ. Коэффициент относительной эффективности модифицированного алгоритма обработки гравитационных данных $\rho$ определяется формулой $\rho = \sqrt{q_{\mathrm{opt}}/q_{\max}(\tau_k)} \geqslant 1$, где $q_{\mathrm{opt}}$ — отношение сигнал-шум на выходе ОФ для отдельного ГИ [4, 7]:

$$q_{\mathrm{opt}} = \pi^{-1}\int\limits_0^\infty |g^2_{0\omega}(j\omega)|^2 d\omega/B(\omega), \qquad g^2_{0\omega}(j\omega) \leftrightarrow g_0^2(t),$$

$q_{\max}(t)$ — отношение сигнал-шум (4) на выходе БНЭ с оптимальной характеристикой.

**5.** В теории оптимального приема для обнаружения слабого сигнала на фоне негауссовской помехи с независимыми значениями используются локально оптимальный [3, 4] и асимптотически оптимальный [3, 4, 8] алгоритмы. Такие алгоритмы можно применить и при коррелированной помехе на выходе ГА [2], если предположить, что обработке подвергается дискретная выборка с независимыми элементами. Характеристика БНЭ при таком подходе определяется оценкой одномерной плотности вероятности огибающей аддитивной помехи.

При амплитудно-частотном подавлении шума характеристика БНЭ для произвольной негауссовской помехи выбирается таким образом, чтобы обеспечить максимальную величину отношения сигнал-шум на выходе БНЭ. Характеристики БНЭ, построенные в соответствии с локально оптимальным алгоритмом обнаружения и алгоритмом амплитудно-частотного подавления, совпадают. Новым элементом схемы при амплитудно-частотном подавлении оказывается наличие ОФ. В условиях априорной неопределенности передаточная функция адаптивного ОФ зависит от непараметрической оценки [6] спектральной плотности шума на выходе БНЭ.

В заключение отметим следующее.

1. При наличии негауссовских шумов случайные процессы $E_1(t)$ и $E_2(t)$ статистически зависимы:

$$W_2(E_1, E_2, 0, 0) \neq W_{11}(E_1, 0)W_{12}(E_2, 0),$$

где $W_{1m}(E_m, 0)$ — одномерная плотность вероятности случайного процесса $E_m(t)$, $m = 1, 2$, при отсутствии ГИ.

2. Целесообразность обработки сигнала ГА по схеме «БНЭ – ОФ – сумматор» (вместо более простой [2] схемы «БНЭ – сумматор») можно определить только апостериори, после построения непараметрической оценки $\widehat{B}(\omega)$ неизвестной спектральной плотности $B(\omega)$ на выходе БНЭ.

3. Частотно-амплитудная обработка выходного сигнала ГА по схеме «обеляющий фильтр – БНЭ – согласованный фильтр» (т. е. включение БНЭ после обеляющего фильтра) оказывается [4] менее эффективным, чем размещение БНЭ на входе оптималь-

ной линейной системы при амплитудно-частотном подавлении аддитивной помехи.

4. Применение критерия максимума отношения сигнал-шум при $A_1(t) \neq A_2(t)$ (огибающие полезных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ в отдельных модах заметно отличаются) не позволяет однозначно определить оптимальную характеристику БНЭ.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-02-17884).

### Литература


1. *Виноградов М.П., Гусев А.В., Милюков В.К.* // Радиотехн. и электроника. 1988. **43**, № 6. С. 692.
2. *Гусев А.В., Милюков В.К.* // Радиотехн. и электроника. 2000. **45**, № 4. С. 234.
3. *Шелухин О.И.* Негауссовские процессы в радиотехнике. М.: Радио и связь, 1999.
4. *Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А.* и др. Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984.
5. *Валеев В.Г., Гонопольский В.Б.* // Радиотехн. и электроника. 1981. **26**, № 11. С. 2301.
6. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
7. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992.
8. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.


Поступила в редакцию
14.05.01

## АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 534.222

# ГЕНЕРАЦИЯ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ И АКУСТИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

**Е. М. Баллад, Б. А. Коршак, В. Г. Можаев, И. Ю. Солодов**

(*кафедра акустики*)

E-mail: balade@mail.ru

**Методом вариации постоянной решено уравнение движения частиц в твердом теле в приближении девятиконстантной теории упругости. Получены выражения, описывающие генерацию третьей гармоники на квадратичной и кубической нелинейности твердой среды. Предложена методика определения нелинейных параметров генерации третьей гармоники. Экспериментально исследована генерация второй и третьей гармоник поверхностных акустических волн в кристалле $LiNbO_3$ и на контактной границе твердых тел. Выполнены оценки величин нелинейных параметров генерации и эффективных комбинаций упругих модулей четвертого порядка исследованного материала.**

### Введение

Исследования нелинейных акустических явлений в твердом теле обычно связаны с определением отклонений силы упругости идеальной решетки от закона Гука. При малых деформациях такие отклонения незначительны, и поэтому в подавляющем большинстве работ ограничиваются квадратичными поправками в уравнении состояния твердого тела, ответственными за генерацию второй акустической гармоники [1]. Однако в последнее время внимание привлечено к новым типам аномально высокой упругой нелинейности, характерной для тел, обладающих микроструктурой или дефектами сплошности (трещины, поры, отслоения и т. п.). Нелинейные эффекты, проявляющиеся в таких телах, могут служить источником информации о структуре твердого тела. В этой связи особую актуальность приобретает развитие теории нелинейных взаимодействий высших порядков и определение нелинейных параметров таких взаимодействий для последующей количественной их оценки. Генерация третьей гармоники рассматривалась в относительно немногих теоретических [2, 3] и экспериментальных [4, 5] работах. При этом не было уделено достаточного внимания определению нелинейного параметра генерации и сравнительным вкладам нелинейностей различных порядков в его величину.

В настоящей работе получены выражения, описывающие пространственные и динамические характеристики генерации третьей гармоники в заданном поле основной волны без учета ее поглощения, и предложена методика определения нелинейных параметров генерации третьей гармоники. Также приводятся результаты экспериментальных исследований процессов генерации второй и третьей гармоник поверхностных акустических волн. Определены пространственные и динамические характеристики эффектов. Динамические характеристики анализируются для двух типов нелинейности: собственной нелинейности материала (так называемой матери-