КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958; 621.372.8

О ЛОВУШЕЧНЫХ МОДАХ ВОЛНОВЕДУЩИХ СИСТЕМ

А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, М. Д. Малых

(*кафедра математики*)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Приведены примеры волноводов, имеющих ловушечные моды с заданной собственной частотой. Доказана возможность существования собственных частот, лежащих выше нижней границы непрерывного спектра.

Возможность существования собственных значений у задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ \int\limits_{\Omega} d\tau\, u^2 < \infty \end{cases} \tag{1}$$

в неограниченных областях Ω типа волновода была доказана еще в 1948 г. [1]. Однако общая теория точечного спектра таких задач далека от завершения. Существование подобных собственных значений представляет значительный интерес, поскольку каждому из них отвечает собственная функция, локализованная вблизи неоднородности (ловушечная мода) [2]. Особенно трудно исследовать точки точечного спектра, вложенные в непрерывный спектр (см. [2–8]). Можно, однако, построить целый класс волноведущих областей, в которых задача (1) имеет заданное собственное значение λ.

В самом деле, пусть $\lambda > 0$ — заданное число. Тогда волноводы, обладающие заданным собственным значением λ, можно построить как области между узловыми линиями функции $u(x, y)$, которая является решением на множестве

$$\mathbb{R}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y \geqslant 0\}$$

вспомогательной задачи

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \\ u|_{y=0} = 0, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, u(x, y)^2 < \infty \quad \forall y \geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ее общее решение можно выписать, применив к ней преобразование Фурье по x. Именно: поскольку решение задачи (2) принадлежит L^2 по x при любом y, то существует ее фурье-преобразование

$$\widehat{u}(k, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, u(x, y)\, \mathrm{e}^{ikx}$$

и

$$u(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, \widehat{u}\, \mathrm{e}^{-ikx}\,.$$

Поэтому, применив к (2) фурье-преобразование, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2} + (\lambda - k^2)\widehat{u} = 0, \\ \widehat{u}|_{y=0} = 0, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, \widehat{u}(k, y)^2 < \infty \quad \forall y \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Эта задача однозначно разрешима, если добавить к ней условие

$$\left.\frac{\partial \widehat{u}}{\partial y}\right|_{y=0} = \sqrt{\lambda - k^2}\, \varphi(k, \lambda) \in L^2(\mathbb{R}^1),$$

и решение ее имеет вид

$$\widehat{u}(k, y) = \varphi(k, \lambda) \sin\left(\sqrt{\lambda - k^2}\, y\right).$$

Поэтому общее решение задачи (2) есть

$$u(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, \varphi(k, \lambda) \sin\left(\sqrt{\lambda - k^2}\, y\right) \mathrm{e}^{-ikx}\,.$$

В частности, возьмем

$$\varphi(k, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{2i}, & k \in (0, a)\,, \\ -\dfrac{1}{2i}, & k \in (-a, 0)\,, \\ 0 \end{cases}$$

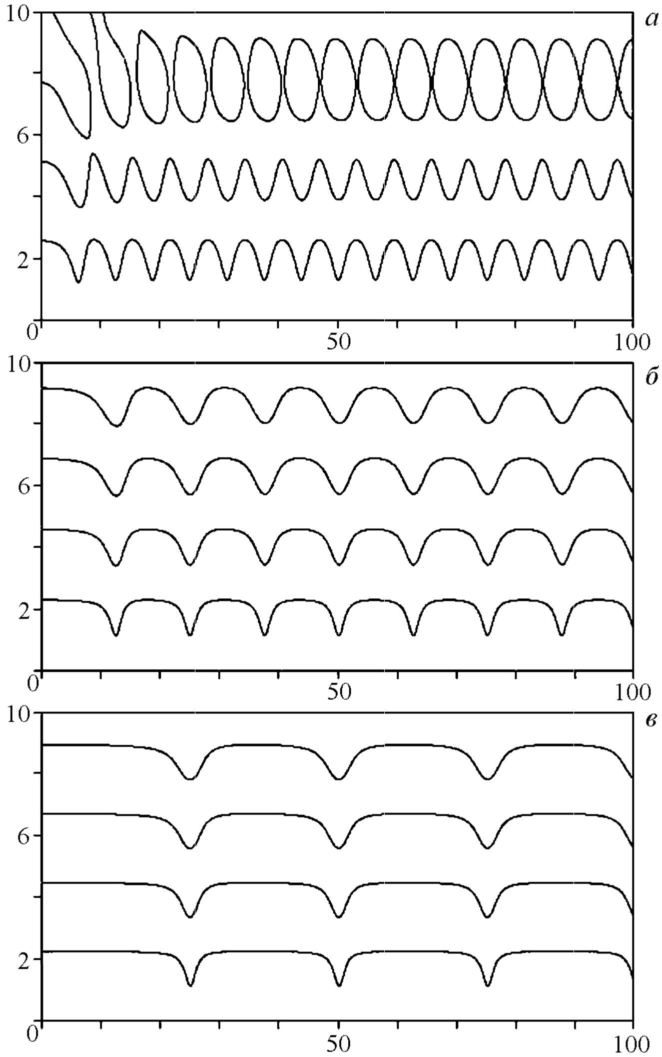

Рис. 1. Узловые линии функции $u(x,y)$ при $\lambda = 2$ и $a = 1$ (*а*), 0.5 (*б*) и 0.25 (*в*)

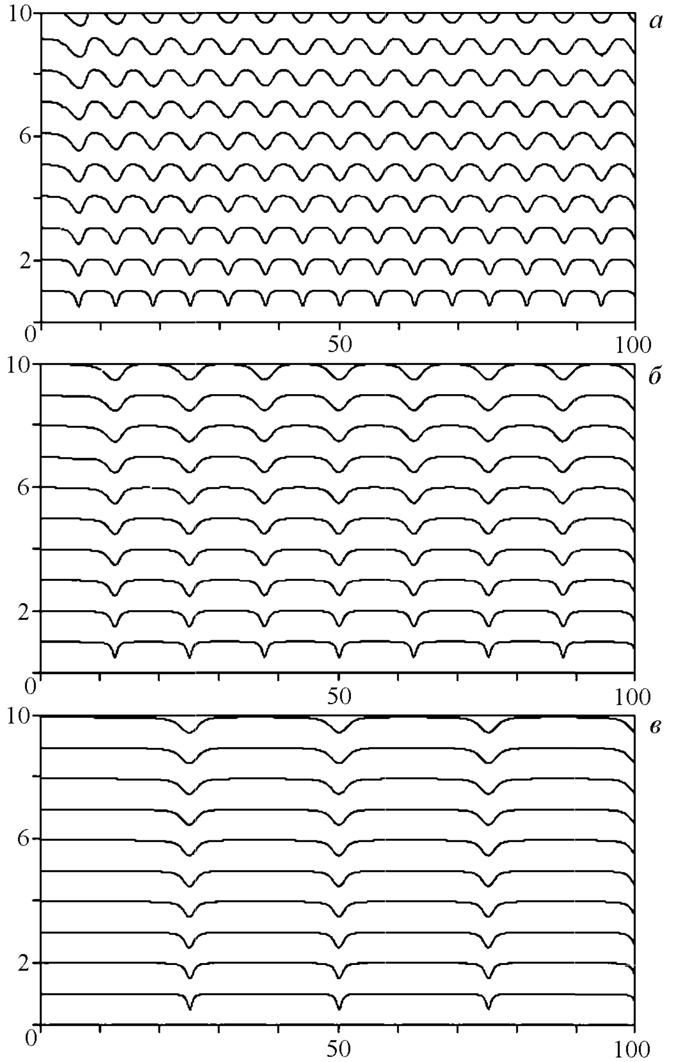

Рис. 2. Узловые линии функции $u(x,y)$ при $\lambda = 10$ и $a = 1$ (*а*), 0.5 (*б*) и 0.25 (*в*)

($a^2 < \lambda$), тогда имеем:

$$u(x,y) = \int\limits_0^a dk \sin\left(\sqrt{\lambda - k^2}\, y\right) \sin kx.$$

Область между двумя кривыми $u(x,y) = 0$ представляет собой гофрированный волновод Ω (рис. 1, 2), в котором функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению $\Delta u + \lambda u = 0$, обращается в нуль на его границе и принадлежит $L^2(\Omega)$, поэтому функция $u(x,y)$ является собственной функцией волновода Ω, отвечающей заданному собственному значению λ.

Отметим, что приведенные результаты показывают возможность построения волноведущих систем с ловушечными модами, в том числе соответствующими собственным значениям, лежащим выше нижней границы непрерывного спектра.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-01-00111).

Литература

1. *Rellich F.* // Studies and Essays Presented to R. Courant. N.Y., 1948. P. 329.
2. *Evans D.V., Levitin M., Vassiliev D.* // J. Fluid Mech. 1994. **261**. P. 21.
3. *Davies E.B., Parnovski L.* // Q. J. Mech. Appl. Math. 1998. **51**. P. 477.
4. *Werner P.* // Z. Angew. Math. Mech. 1987. **67**, No. 4. P. 43.
5. *Exner P., Seba P.* // J. Math. Phys. 1989. **30**. P. 2574.
6. *Bulla W., Gesztesy S., Renger W., Simon B.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. **125**. P. 1487.
7. *Делицын А.Л.* // ЖВМ и МФ. 2000. **40**. С. 577.
8. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 5. С. 23 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 5).

Поступила в редакцию
01.06.01