ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВОЛНОВОДА В ОКРЕСТНОСТИ РЕБРА ГРАНИЦЫ

А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицын, И.Е. Могилевский, А.Г. Свешников

(*кафедра математики*)

E-mail: mogilevsky@afrodita.phys.msu.su

На основе метода, впервые предложенного В.А. Кондратьевым, построено асимптотическое представление электромагнитного поля волновода вблизи границы ребра. Приведен явный вид решения спектральной задачи в окрестности ребра, где поперечное сечение волновода совпадает с сектором.

Одной из весьма важных задач, требующих строгого математического изучения, является задача о расчете электромагнитного поля в волноведущих системах при наличии ребер на их границах. Существование угловых точек в сечении волновода, как хорошо известно, приводит к особенностям в решениях краевых задач [1–4], что существенно осложняет применение численных методов для расчета подобных систем [5–7]. В частности, в работах В.А. Ильина [8–10] показано, что наличие ребер у неидеального волновода при решении краевой задачи для магнитного вектора Герца приводит к появлению добавочного члена, учитывающего влияние угловой линии и имеющего логарифмическую особенность на ребре. Дифференциальные свойства точных решений краевых задач и оценки сходимости приближенных решений к точным для уравнений Лапласа и Пуассона на многоугольниках установлены в работах [11, 12].

Одним из способов повышения эффективности численных методов является выделение особенностей решения в явном виде, т. е. построение асимптотики электромагнитного поля в окрестности ребра в волноводе. При этом существенно используются результаты по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работах В.А. Кондратьева [13], а также С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского [14]. Однако непосредственное применение этих результатов в теории волноводов связано со значительными трудностями, обусловленными прежде всего спецификой уравнений Максвелла и векторным характером задачи. Предлагаемый метод исследования позволяет получить асимптотическое представление электромагнитного поля в окрестности ребра в волноводе с точностью до членов произвольного порядка.

Постановка задачи

Пусть электромагнитное поле имеет гармоническую зависимость от времени вида $\mathrm{e}^{-i\omega t}$, а волновод представляет собой цилиндр $Q = \{(x, y) \in \Omega,$ $z \in (-\infty, \infty)\}$, граница области $\partial\Omega$ содержит угловую точку O с углом произвольной величины. (Результаты могут быть легко распространены на случай, когда на границе $\partial\Omega$ находится конечное число угловых точек.) Предполагается, что вне некоторой окрестности угловой точки граница области $\partial\Omega$ гладкая, а внутри этой окрестности область Ω совпадает с сектором. Считаем, что магнитная проницаемость внутри волновода $\mu \equiv 1$, а диэлектрическая проницаемость ε содержит лишь вещественную часть, зависит только от поперечных координат и имеет ограниченные первые производные. Будем искать решения системы уравнений Максвелла с зависимостью от z вида

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{n-k}}{(n-k)!}\mathbf{E}_k\,\mathrm{e}^{i\beta z}, \quad \mathbf{H} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{n-k}}{(n-k)!}\mathbf{H}_k\,\mathrm{e}^{i\beta z}.$$

Такое представление имеет физический смысл нормальных волн рассматриваемого волновода, которые выражаются через собственные и присоединенные векторы соответствующей спектральной задачи. При указанных условиях в работах [15, 16] получена система уравнений для собственных векторов компонент поля $\{H_-, E_z\}$ и собственных значений β^2:

$$\begin{cases} \operatorname{grad}\operatorname{div} H_- + k^2\varepsilon H_- + ik\varepsilon\operatorname{rot} E_z = \beta^2 H_-, \\ ik\operatorname{rot}\varepsilon H_- + \operatorname{div}\varepsilon\operatorname{grad} E_z = \beta^2\varepsilon E_z, \\ H_\nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad E_z|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где использованы обозначения

$$H_- = \mathbf{i}_x H_x + \mathbf{i}_y H_y = \mathbf{i}_r H_r + \mathbf{i}_\varphi H_\varphi,$$

$$\operatorname{div} H_- = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{rot} H_- = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{grad} E_z = \mathbf{i}_x\frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{i}_y\frac{\partial E_z}{\partial y} = \mathbf{i}_r\frac{\partial E_z}{\partial r} + \mathbf{i}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{rot} E_z = \mathbf{i}_x\frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathbf{i}_y\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mathbf{i}_r\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \mathbf{i}_\varphi\frac{\partial E_z}{\partial r}.$$

В работах [15, 16] также доказано существование слабых решений задачи (1) в гильбертовом пространстве $W = H_0(\mathrm{div}) \oplus \dot{H}^1(\Omega)$, где $H_0(\mathrm{div}) = \{H_- | H_- \in (L_2(\Omega))^2,\ \mathrm{div}\, H_- \in L_2(\Omega),\ \mathbf{Hn}|_{\partial\Omega} = 0\}$, $\|H_-\|^2_{H_0(\mathrm{div})} = \|H_-\|^2_{(L_2(\Omega))^2} + \|\mathrm{div}\, H_-\|^2_{L_2(\Omega)}$. В работах [15, 16] указано, что слабая постановка задачи (1) порождает ограниченный оператор T: $(L_2(\Omega))^3 \to W$, компактный в подпространстве V пространства W, выделяемом дополнительным условием $\mathrm{rot}\, H_- = -ik\varepsilon E_z$, которое понимается в смысле обобщенных функций. Таким образом, спектр задачи (1), рассматриваемой в пространстве V, состоит из счетного множества возрастающих по модулю собственных значений.

Решение задачи

Рассмотрим теперь систему уравнений (1) с произвольной правой частью $\mathbf{f}(x,y)$. Используя вариационную постановку, на основании теоремы Лакса–Мильграма можно заключить, что при фиксированной правой части, удовлетворяющей условию $\mathrm{rot}\, f_-(x,y) = -ikf_z(x,y)$, в пространстве V решение существует и единственно.

При достаточно гладких функции диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x,y)$ и правой части $\mathbf{f}(x,y)$ решение является гладким при удалении от угловой точки [17, 18]. Перенося все неглавные члены системы (1) в правую часть и используя для их суммы опять обозначение $\mathbf{f}$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 H_r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 H_\varphi}{\partial r \partial\varphi} - \\ \qquad - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial H_r}{\partial\varphi} - \dfrac{1}{r^2}H_r = f_r(r,\varphi), \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 H_\varphi}{\partial\varphi^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 H_\varphi}{\partial\varphi\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial H_r}{\partial\varphi} = f_\varphi(r,\varphi), \\ \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial\varphi^2} = f_z(r,\varphi) \end{cases} \tag{2}$$

с дополнительным условием

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi} = -ik\varepsilon E_z \equiv p_z(r,\varphi).$$

Бесконечная область

Рассмотрим сначала систему (2) в случае, когда область Ω представляет собой бесконечный сектор K с углом ω_0. Граничные условия для разных компонент векторов примут вид

$$H_\varphi|_{\varphi=0} = H_\varphi|_{\varphi=\omega_0} = 0, \quad E_z|_{\varphi=0} = E_z|_{\varphi=\omega_0} = 0.$$

Для исследования системы, следуя работам [13, 14], введем пространство $V^l_\gamma(K)$ с нормой

$$\|u\|^2_{V^l_\gamma(K)} = \sum_{j+k\leqslant l} \int\limits_K r^{2(\gamma-l+j)} \left|\frac{\partial^{j+k}u}{\partial r^j \partial\varphi^k}\right|^2 r\,dr\,d\varphi,$$

где $l \geqslant 0$ — целое, γ — любое действительное число. Пусть правая часть системы (2) имеет вид $\mathbf{f} = \{f_r, f_\varphi, f_z\} \in \left(V^l_\gamma(K)\right)^3$, $p_z \in V^{l+1}_\gamma(K)$. Проведем замену переменных: $\tau = \ln\frac{1}{r}$. Домножим каждое уравнение получившейся системы на $\mathrm{e}^{-2\tau}$ и сделаем преобразование Фурье по τ. Получившаяся система уравнений допускает явное построение решения, которое имеет следующий вид:

$$\widehat{H}_r(\lambda,\varphi) = -\frac{2}{\omega_0}\sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda+i)\widehat{F}^c_{rn}(\lambda) - \frac{\pi n}{\omega_0}(\lambda-i)\widehat{P}^s_{zn}(\lambda)}{(\lambda-i)\left[(\lambda+i)^2 + \left(\frac{\pi n}{\omega_0}\right)^2\right]} \times \cos\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi,$$

$$\widehat{H}_\varphi(\lambda,\varphi) = -\frac{2}{\omega_0}\sum_{n=1}^\infty \frac{\widehat{F}^s_{\varphi n}(\lambda) - i(\lambda+i)\widehat{P}^s_{zn}(\lambda)}{(\lambda+i)^2 + \left(\frac{\pi n}{\omega_0}\right)^2}\sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi,$$

$$\widehat{E}_z(\lambda,\varphi) = -\frac{2}{\omega_0}\sum_{n=1}^\infty \frac{\widehat{F}^s_{zn}(\lambda)}{\lambda^2 + \left(\frac{\pi n}{\omega_0}\right)^2}\sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi, \tag{3}$$

где

$$\widehat{F}^s_{\varphi n}(\lambda) = \int\limits_0^{\omega_0} \sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi\, d\varphi \int\limits_0^\infty f_\varphi(r,\varphi) r^{2+i\lambda} dr,$$

$$\widehat{F}^c_{rn}(\lambda) = \int\limits_0^{\omega_0} \cos\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi\, d\varphi \int\limits_0^\infty f_r(r,\varphi) r^{2+i\lambda} dr,$$

$$\widehat{F}^s_{zn}(\lambda) = \int\limits_0^{\omega_0} \sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi\, d\varphi \int\limits_0^\infty f_z(r,\varphi) r^{2+i\lambda} dr,$$

$$\widehat{P}^s_{zn}(\lambda) = \int\limits_0^{\omega_0} \sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi\, d\varphi \int\limits_0^\infty p_z(r,\varphi) r^{1+i\lambda} dr.$$

Используя свойства преобразования Фурье и пространств $V^l_\gamma(K)$, а также известный явный вид решения, можно показать, что обратное преобразование определяет решение системы (2), для которого справедливы оценки

$$\|H_-(r,\varphi)\|_{\left(V^{l+2}_\gamma(K)\right)^2} \leqslant \leqslant C\left\{\|f_-\|_{\left(V^l_\gamma(K)\right)^2} + \|p_z\|_{V^{l+1}_\gamma(K)}\right\},$$

$$\|E_z(r,\varphi)\|_{V^{l+2}_\gamma(K)} \leqslant C\,\|f_z\|_{V^l_\gamma(K)}.$$

Теперь получим асимптотическое представление решения в бесконечном секторе. Пока построенное нами решение (3) определено лишь на прямой $\mathrm{Im}\,\lambda = h = -\gamma + l + 1$. Для построения асимптотики необходимо, чтобы (3) было определено в некоторой полосе $h_1 < \mathrm{Im}\,\lambda < h_2$, а для этого требуется, чтобы правая часть принадлежала пересечению пространств $V_\gamma^l(K)$ с разными индексами γ. Пусть

$$\begin{aligned} &f_-(r,\varphi)=\{f_r,f_\varphi\}\in\left(V^l_{\gamma_1'}(K)\cap V^l_{\gamma_2'}(K)\right)^2,\\ &p_z(r,\varphi)\in V^{l+1}_{\gamma_1'}(K)\cap V^{l+1}_{\gamma_2'}(K), \qquad \gamma_1'>\gamma_2',\\ &f_z(r,\varphi)\in V^l_{\gamma_1}(K)\cap V^l_{\gamma_2}(K), \qquad \gamma_1>\gamma_2. \end{aligned}$$

Из свойств пространств $V_\gamma^l(K)$ и преобразования Фурье вытекает, что компоненты $\widehat{\mathbf{F}}(\lambda,\varphi)$ суть аналитические функции в полосах $h_1'\leqslant \mathrm{Im}\ \lambda\leqslant h_2'$, $h_1\leqslant\mathrm{Im}\ \lambda\leqslant h_2$, где $h_i'=-\gamma_i'+l+1$, $h_i=-\gamma_i+l+1$, $i=1,2$, а решение (3) — мероморфная вектор-функция. Теорема о вычетах позволяет перейти от интегрирования по прямой $\mathrm{Im}\,\lambda=h_1$ к прямой $\mathrm{Im}\,\lambda=h_2$, а находящиеся между ними полюсы вектор-функции (3) и дадут асимптотику решения. Применяя теорему о вычетах для прямоугольного контура, ограниченного прямыми

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}\,\lambda=h_1',\quad \mathrm{Im}\,\lambda=h_2',\quad \mathrm{Re}\,\lambda=\pm N \quad \text{для}\quad \widehat{H}_-(\lambda,\varphi),\\ &\mathrm{Im}\,\lambda=h_1,\quad \mathrm{Im}\,\lambda=h_2,\quad \mathrm{Re}\,\lambda=\pm N \quad \text{для}\quad \widehat{E}_z(\lambda,\varphi), \end{aligned}$$

переходя к пределу при $N\to\infty$ и возвращаясь к исходным переменным, получим следующее представление решения:

$$\begin{aligned} H_r(r,\varphi)&=\sum_{h_1'<\frac{\pi n}{\omega_0}-1<h_2'} A_n^{(r)} r^{\frac{\pi n}{\omega_0}-1}\cos\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi+W_r(r,\varphi),\\ H_\varphi(r,\varphi)&=\sum_{h_1'<\frac{\pi n}{\omega_0}-1<h_2'} A_n^{(\varphi)} r^{\frac{\pi n}{\omega_0}-1}\sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi+W_\varphi(r,\varphi),\\ E_z(r,\varphi)&=\sum_{h_1<\frac{\pi n}{\omega_0}<h_2} A_n^{(z)} r^{\frac{\pi n}{\omega_0}}\sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi+W_z(r,\varphi), \end{aligned}$$

где $W_-\in\left(V^{l+2}_{\gamma_2'}(K)\right)^2$, $W_z\in V^{l+2}_{\gamma_2}(K)$.

Конечная область

Пусть O — угловая точка, $O\in\partial\Omega$, вне любой окрестности точки O контур $\partial\Omega$ гладкий, а в круге $B_d=\{(r,\varphi)\colon\ 0<r<d,\ 0<\varphi<2\pi\}$ область Ω совпадает с сектором K. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,H_-=f_-,\\ \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,E_z=f_z, & \mathbf{f}\in(L_2(\Omega))^3,\\ H_\nu|_{\partial\Omega}=0,\quad E_z|_{\partial\Omega}=0, & p_z\in\dot{H}^1(\Omega),\\ \mathrm{rot}\,H_-=p_z. \end{cases} \tag{4}$$

С помощью срезающей функции [14] $\chi(r)\in C^\infty$:

$$\chi(r)=\begin{cases}1, & r\leqslant d/2,\\ 0, & r>d,\end{cases}$$

задачу в конечной области удается свести к задаче в бесконечном секторе. Используя результат о представлении решения в бесконечном секторе, для случая конечной области можно получить

$$\begin{aligned} H_r(r,\varphi)&=\chi\sum_{0<\frac{\pi n}{\omega_0}<2} C_n^{(r)} r^{\frac{\pi n}{\omega_0}-1}\cos\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi+W_r^{(1)}(r,\varphi),\\ H_\varphi(r,\varphi)&=\chi\sum_{0<\frac{\pi n}{\omega_0}<2} C_n^{(\varphi)} r^{\frac{\pi n}{\omega_0}-1}\sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi+W_\varphi^{(1)}(r,\varphi),\\ E_z(r,\varphi)&=\chi\sum_{0<\frac{\pi n}{\omega_0}<2} C_n^{(z)} r^{\frac{\pi n}{\omega_0}}\sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi+W_z^{(1)}(r,\varphi), \end{aligned}$$

где $\mathbf{W}(r,\varphi)\in\left(V_0^2(\Omega)\right)^3$.

Главные члены асимптотики для компонент поля H_- и E_z при $\pi<\omega_0<2\pi$ имеют вид

$$\begin{aligned} &H_-\sim r^{\mu_1},\quad \mu_1=\frac{\pi}{\omega_0}-1,\quad -1<\mu_1<0,\quad H_-\in L_2(\Omega),\\ &E_z\sim r^{\mu_2},\qquad \mu_2=\frac{\pi}{\omega_0},\qquad 0<\mu_2<1,\qquad E_z\in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

При $0<\omega_0<\pi$

$$\begin{aligned} &H_-\sim r^{\mu_1},\quad 0<\mu_1<1,\quad H_-\in H^1(\Omega),\\ &E_z\sim r^{\mu_2},\qquad 1<\mu_2,\qquad E_z\in H^1(\Omega), \end{aligned}$$

что полностью соответствует условию Мейкснера [1] на ребре. Коэффициенты $C_n^{(r)}$, $C_n^{(\varphi)}$, $C_n^{(z)}$ определяются явно через правые части уравнений системы (4):

$$C_n^{(r)}=-C_n^{(\varphi)}=\frac{(f_-,\eta_{n-})_{L_2(\Omega)}-(\mathrm{rot}\,p_z,\eta_{n-})_{L_2(\Omega)}}{2(\omega_0-\pi n)},$$

$$C_n^{(z)}=-\frac{(f_z,\xi_n)_{L_2(\Omega)}}{\pi n},$$

где $\eta_{n-}=\chi(r)r^{-(\pi n/\omega_0-1)}\left\{\cos\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi,-\sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi\right\}+$ $+Z_{n-}(r,\varphi)$, $Z_{n-}(r,\varphi)\in\left(V_0^1(\Omega)\right)^2$ — решение задачи

$$\begin{cases} \nabla^2 Z_{n-}=-\left[\nabla^2,\chi\right]r^{-(\pi n/\omega_0-1)}\times\\ \qquad\qquad\times\left\{\cos\dfrac{\pi n}{\omega_0}\varphi,-\sin\dfrac{\pi n}{\omega_0}\varphi\right\},\\ Z_{n\nu}|_{\partial\Omega}=0,\quad \left.\dfrac{\partial Z_{n\tau}}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=0; \end{cases}$$

$\xi_n=\chi(r)r^{-\pi n/\omega_0}\sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi+Z_{nz}(r,\varphi)$, $Z_{nz}(r,\varphi)\in$ $\in V_0^1(\Omega)$ — решение задачи

$$\begin{cases} \Delta Z_{nz}=-\left[\Delta,\chi\right]r^{-\pi n/\omega_0}\sin\dfrac{\pi n}{\omega_0}\varphi,\\ Z_{nz}|_{\partial\Omega}=0. \end{cases}$$

Будем считать, что диэлектрическая проницаемость постоянна в той части области, которая совпадает с сектором, и достаточно гладкая в оставшейся части области Ω. Воспользуемся тем, что решается задача на собственные векторы и собственные значения, и подставим найденную асимптотику в правую часть (4). Тогда получим более подробное представление решения:

$$H_{-}(r,\varphi)=(\beta^2-k^2\varepsilon)\chi(r)\times$$
$$\times\sum_{0<\frac{\pi n}{\omega_0}<2}\frac{C_n^{(r)}r^{\pi n/\omega_0+1}\left\{\cos\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi,-\sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi\right\}}{2\frac{\pi n}{\omega_0}}-$$
$$-ik\varepsilon\chi(r)\sum_{0<\frac{\pi n}{\omega_0}<2}\frac{1}{2}C_n^{(z)}r^{\pi n/\omega_0+1}\left\{\cos\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi,-\sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi\right\}+$$
$$+\chi(r)\sum_{0<\frac{\pi n}{\omega_0}<4}D_n^{(r)}r^{\frac{\pi n}{\omega_0}-1}\left\{\cos\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi,-\sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi\right\}+$$
$$+W_{-}^{(2)}(r,\varphi),$$

$$E_z(r,\varphi)=\chi(r)\sum_{0<\frac{\pi n}{\omega_0}<4}D_n^{(z)}r^{\pi n/\omega_0}\sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi+$$
$$+\left(\beta^2-k^2\varepsilon\right)\chi(r)\sum_{0<\frac{\pi n}{\omega_0}<2}\frac{C_n^{(z)}r^{\pi n/\omega_0+2}\sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi}{4\left(1+\frac{\pi n}{\omega_0}\right)}+$$
$$+W_z^{(2)}(r,\varphi),$$

где $W_{-}^{(2)}(r,\varphi)\in\left(V_0^4(\Omega)\right)^2$, $W_z^{(2)}(r,\varphi)\in V_0^5(\Omega)$, $D_n^{(r)}=\dfrac{(g_-,\eta_{n-})_{L_2(\Omega)}}{2(\omega_0-\pi n)}$, $D_n^{(z)}=-\dfrac{(g_z,\xi_n)_{L_2(\Omega)}}{\pi n}$, где

$$g_-=\left(\beta^2-k^2\varepsilon\right)\left[\nabla^2,\chi\right]\times$$
$$\times\sum_{0<\frac{\pi n}{\omega_0}<2}\frac{C_n^{(r)}r^{\pi n/\omega_0+1}\left\{\cos\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi,-\sin\frac{\pi n}{\omega_0}\varphi\right\}}{4\frac{\pi n}{\omega_0}}+$$
$$+\left(\beta^2-k^2\varepsilon\right)W_{-}^{(1)}(r,\varphi),$$

$$g_z=-\left(\beta^2-k^2\varepsilon\right)\left[\Delta^2,\chi\right]\sum_{0<\frac{\pi n}{\omega_0}<2}\frac{C_n^{(z)}r^{\pi n/\omega_0+2}\sin\frac{\pi n}{\omega_0}}{4\left(1+\frac{\pi n}{\omega_0}\right)}+$$
$$+\left(\beta^2-k^2\varepsilon\right)W_z^{(1)}(r,\varphi).$$

Таким образом, построен асимптотический ряд, приближающий решение вблизи особой точки границы области.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 00-01-00111).

Литература

1. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М.: Высш. школа, 1991.
2. *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции). М.: Изд-во предпр. ред. журн. «Радиотехника», 1996.
3. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* // Алгебра и анализ. 1989. **1**, №1. С. 96.
4. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
5. *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979.
6. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Могилевский И.Е.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. №5. С. 14 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 5. P. 12).
7. *Babuška I., Guo B.Q.* // SIAM J. Numer. Anal. 1988. **25**, No. 4. P. 837.
8. *Ильин В.А.* Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М. (МГУ), 1953.
9. *Ильин В.А.* // ДАН СССР. 1954. **97**, №2. С. 213.
10. *Ильин В.А.* // ДАН СССР. 1954. **98**, №6. С. 925.
11. *Волков Е.А.* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1972. Т. 117. С. 75.
12. *Волков Е.А.* // Тр. Матем. ин-та РАН. 1995. Т. 210. С. 90.
13. *Кондратьев В.А.* // Тр. Моск. матем. о-ва. 1967. **16**. С. 209.
14. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991.
15. *Делицын А.Л.* // ЖВМ и МФ. 1999. **39**, №2. С. 315.
16. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1995. №2. С. 95 (Moscow University Phys. Bull. 1995. No. 2. P. 85).
17. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
18. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г.* // ЖВМ и МФ. 1999. **39**, №11. С. 1869.

Поступила в редакцию
11.07.01