пределение «будет жить» (если $-\varepsilon_k/\theta$ велико) достаточно долго.

Пример с маятником также прост. При $\hbar \to 0$ большой пакет собственных значений сходится к энергии E. Соответственно сумма (20), отвечающая этому пакету, будет стремиться к E, а функция Вагнера собственных функций будет сходиться к микроканоническому распределению. Рассмотрим теперь многомерный случай.

Предположим, что Λ — инвариантное лагранжево многообразие с инвариантной мерой, отвечающее классическому гамильтониану $H(p,x)$ на уровне энергии E. Асимптотика собственных функций соответствующего уравнения Шрёдингера дается каноническим оператором на этом лагранжевом многообразии. Тогда распределение всего набора их вагнеровских функций будет стремиться при $\hbar \to 0$ в обобщенном смысле к δ_Λ-функции на этом лагранжевом многообразии [17]. Такое распределение мы называем неканоническим. Оно также является квазистационарным.

Литература

1. *Маслов В.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. №6. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 6. P. 1).
2. *Маслов В.П.* // Функцион. анализ и приложения. 2000. **34**, №4. С. 35.
3. *Маслов В.П.* // ТМФ. 2000. **125**, №2. С. 297.
4. *Маслов В.П.* // ТМФ. 2000. **129**, №3. С. 464.
5. *Маслов В.П.* // Матем. заметки. 2000. **68**, №6. С. 945.
6. *Maslov V.P.* // Russ. J. Mathem. Phys. 2000. **7**, No. 4. P. 488.
7. *Maslov V.P.* // Russ. J. Mathem. Phys. 2002. **9**, No. 1. P. 112.
8. *Маслов В.П.* // ТМФ. 2002. **131**, №2.
9. *Маслов В.П.* // Матем. заметки. 2002. **71**, №4. С. 558.
10. *Боголюбов Н.Н.* Избранные труды: В 3 т. Т. 2, 3. Киев: Наукова думка, 1970, 1971.
11. *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1987.
12. *Маслов В.П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
13. *Маслов В.П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Наука, 1978.
14. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* Метод комплексного ростка в многочастичных задачах и задачах квантовой теории поля. М.: УРСС, 2000.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1976.
16. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика. М.: Наука, 1979.
17. *Maslov V.P.* // Russ. J. Mathem. Phys. 1995. **2**, No. 4. P. 527.

Поступила в редакцию
13.03.02

УДК 514.752.4; 517.95

ДВУХСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ sin-ГОРДОНА И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Е.В. Маевский

(*кафедра математики*)

Проведена классификация поверхностей постоянной отрицательной кривизны $K = -1$, соответствующих двухсолитонным решениям уравнения sin-Гордона, по геометрическим характеристикам их особенностей.

Уравнение sin-Гордона

$$z_{uv} = \sin z,$$

встречающееся в ряде задач математической физики [1–3], имеет наглядную геометрическую интерпретацию [4]. Это уравнение представляет собой уравнение Гаусса для чебышевской метрики

$$ds^2 = du^2 + 2\cos z(u,v)dudv + dv^2$$

гауссовой кривизны $K \equiv -1$. В пространстве E^3 по заданному решению $z(u,v)$ можно построить псевдосферическую поверхность (ПП) — поверхность постоянной гауссовой кривизны $K \equiv -1$. На каждой ПП можно ввести асимптотическую сеть, одновременно являющуюся чебышевской. Если таковой является сеть координатных линий (u,v), то соответствие (решение z) $\longmapsto$ (псевдосферическая поверхность $\Phi[z]$) взаимно однозначно. Известно, что в E^3 не существует геодезически полной псевдосферической поверхности, любая $\Phi[z]$ имеет особенности — ребра возврата и острия, — они соответствуют линиям уровня функции $z(u,v) = \pi n$. По заданному в E^3 ребру $\Phi[z]$ можно однозначно построить фрагмент содержащей его поверхности, поэтому становится возможным классифицировать ПП по их особенностям.

Особую роль в физике играют решения уравнения sin-Гордона в виде уединенных волн (односолитонные)

$$z = 4\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{e}^{pu+v/p}$$

и в виде связанного состояния n уединенных волн (n-солитонные). Односолитонное решение характеризуется параметром p — вещественным или комплексным — амплитудой (параметром) солитона. Присоединение одного солитона с параметром p, т. е. переход от n-солитонного решения $z^{(n)}(u,v)$ к $(n+1)$-солитонному $z^{(n+1)} = \mathrm{B}_p z^{(n)}$, осуществляется преобразованием Бэклунда B_p, которое определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} z_u^{(n+1)} = z_u^{(n)} + 2p \sin \dfrac{z^{(n+1)} + z^{(n)}}{2}, \\ z_v^{(n+1)} = -z_v^{(n)} + \dfrac{2}{p} \sin \dfrac{z^{(n+1)} - z^{(n)}}{2}. \end{cases}$$

Чтобы выделить единственное решение этой системы, дополним ее начальным условием $z^{(n+1)}(0,0) + z^{(n)}(0,0) = \pi$. Отметим, что односолитонное решение получается путем применения преобразования Бэклунда к тривиальному решению уравнения sin-Гордона $z = 0$. Известно, что преобразования Бэклунда с различными параметрами перестановочны и

$$\mathrm{B}_p \mathrm{B}_q z = z + 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{p+q}{p-q} \operatorname{tg} \frac{\mathrm{B}_p z - \mathrm{B}_q z}{4} \right).$$

Применяя эту формулу к тривиальному решению, получим двухсолитонное решение:

$$z(u,v) = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{p+q}{p-q} \, \frac{\mathrm{e}^{pu+v/p} - \mathrm{e}^{qu+v/q}}{1 + \mathrm{e}^{pu+v/p} \, \mathrm{e}^{qu+v/q}} \right),$$

где $p \neq \pm q$. В случае $p = q$ в этой формуле необходимо перейти к пределу. Если $p = -q$, то получаем $z = 0$, так что такие значения параметров интереса не представляют.

Выражение для радиус-вектора псевдосферической поверхности, соответствующей односолитонному решению — так называемой поверхности Дини, известно [5]. В прямоугольной декартовой системе координат $O\xi\eta\zeta$

$$\mathbf{r} = \frac{2p}{p^2+1} \, \frac{1}{\operatorname{ch}(pu+v/p)} \mathbf{e} + \left(-\frac{2p}{p^2+1} \operatorname{th}(pu+v/p) + u + v \right) \mathbf{n},$$

где $\mathbf{e} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$, $\mathbf{n} = (0,0,1)$, $\phi = u - v$. На поверхности Дини имеется только одно ребро (соответствующее значению $z = \pi$, которое достигается при $pu + v/p = 0$), являющееся винтовой линией при $|p| \neq 1$ и окружностью при $|p| = 1$.

Геометрическое преобразование Бэклунда [6] позволяет перейти от поверхности $\Phi[z]$, заданной в E^3 радиус-вектором $\mathbf{r}(u,v)$, к поверхности $\Phi[\mathrm{B}_p z]$, определяемой радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{2p}{p^2+1} \, \frac{1}{\sin z} \left(\mathbf{r}_u \sin \frac{z + \mathrm{B}_p z}{2} + \mathbf{r}_v \sin \frac{z - \mathrm{B}_p z}{2} \right).$$

Такое преобразование позволяет построить радиус-вектор поверхности, соответствующей двухсолитонному решению [7]. На этой поверхности имеются три особенности: $z = 0$ — ребро или острие и ребра $z = \pm\pi$. Целью настоящей работы является классификация этих особенностей (а вместе с ними и соответствующих поверхностей).

На плоскости (u,v) упомянутые выше линии уровня $z = 0$ и $z = \pm\pi$ определяются в координатах $x = pu + v/p$ и $y = qu + v/q$ (при $p \neq q$) и $Y = pu - v/p$ (при $p = q$) уравнениями

ребро $z = 0$ при $p \neq q$: $\quad y = x$,

ребра $z = \pm\pi$ при $p \neq q$:

$$y = \ln \left[\pm \frac{p+q}{p-q} \left(1 \mp 2 \frac{p^2+q^2}{p^2-q^2} \left(\mathrm{e}^x \pm \frac{p+q}{p-q} \right)^{-1} \right) \right], \quad (1)$$

ребро $z = 0$ при $p = q$: $\quad Y = 0$,

ребра $z = \pm\pi$ при $p = q$: $\; Y = \pm \operatorname{ch} x$.

Радиус-вектор ребра в системе $O\xi\eta\zeta$, его геодезическая кривизна (k) и кручение ($\varkappa$) могут быть представлены как функции переменной x. Отметим, что поскольку нормальная кривизна ребра возврата равна нулю, то его кривизна как кривой в пространстве совпадает по модулю с его геодезической кривизной.

Для ребра $z = 0$:

$$\mathbf{R} = (pq+1) \left[\frac{2(p+q)}{(p^2+1)(q^2+1)} \, \frac{1}{\operatorname{ch} x} \mathbf{e} + \left(-\frac{2(p+q)}{(p^2+1)(q^2+1)} \operatorname{th} x + \frac{1}{p+q} x \right) \mathbf{n} \right],$$

$$k = \frac{2(p+q)}{1+pq} \, \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad \varkappa = \frac{pq-1}{pq+1}.$$

Для ребер $z = \pm\pi$:

$$\mathbf{R} = \frac{2p}{p^2+1} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \mp \frac{q(p^2-1)}{p(q^2+1)} \operatorname{th} x \right) \mathbf{e} \pm \frac{4pq}{(p^2+1)(q^2+1)} \mathbf{e}' + \left[\frac{2p}{p^2+1} \left(-\operatorname{th} x \mp \frac{q(p^2-1)}{p(q^2+1)} \, \frac{1}{\operatorname{ch} x} \right) + \frac{p(1-q^2)}{p^2-q^2} x + \frac{q(p^2-1)}{p^2-q^2} y \right] \mathbf{n},$$

$$k = \mp \frac{2q}{q^2+1} \left(\operatorname{sh} x \mp \frac{p}{q} \right) \left(\operatorname{sh} x \pm \frac{q}{p} \right) \times \left[\left(\operatorname{sh} x \mp \frac{q(p^2-1)}{p(q^2+1)} \right) \operatorname{ch} x \right]^{-1},$$

$$\varkappa = \frac{q^2-1}{q^2+1} \left(\operatorname{sh} x \mp \frac{q(p^2+1)}{p(q^2-1)} \right) \left[\left(\operatorname{sh} x \mp \frac{q(p^2-1)}{p(q^2+1)} \right) \right]^{-1},$$

где $\mathbf{e}' = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$, $\phi = u - v = \frac{p(q^2+1)}{p^2-q^2} x - \frac{q(p^2+1)}{p^2-q^2} y$, а y определяется через x уравнением (1).

Соответствующие выражения для радиус-вектора, кривизны и кручения при $p=q$ получаются из представленных предельным переходом.

Проанализируем приведенные выражения. Координатная ось ζ является своеобразной осью поверхности (не осью симметрии!), на которую «навиваются» ребра. Ребро $z=0$ асимптотически при $s\to\pm\infty$ (где s — естественный параметр ребра) вырождается в ось ζ. Ребра $z=\pm\pi$ совмещаются друг с другом путем зеркального отражения относительно координатной плоскости $O\xi\eta$ и поворота вокруг оси ζ; поэтому достаточно рассмотреть одно из них, например $z=\pi$. Оно вырождается при $s\to\pm\infty$ в винтовые линии, служащие ребрами поверхностей Дини с параметрами p (например, при $s\to+\infty$) и q (при $s\to-\infty$). Геодезическая кривизна и кручение ребра $z=\pi$ могут менять знак, поэтому кривую, которую они определяют в пространстве, будем классифицировать по взаимному расположению на ней точек смены знака кривизны и кручения.

Ниже приведена классификация двухсолитонных поверхностей, содержащая восемь характерных случаев. Предварительно отметим некоторые характерные геометрические особенности ребра $z=\pi$. Во-первых, ребро может содержать точку $\varkappa=0$, в которой оно меняет знак винтового движения вокруг оси ζ (т. е. правое винтовое движение меняется на левое или наоборот). В приведенной классификации это типы 1, 4. Во-вторых, ребро может содержать дугу с точкой возврата $k=\varkappa=\infty$ (такова, например, точка $t=0$ на кривой $\mathbf{r}=(t^2,t^3,t^4)$) и двумя расположенными по разные стороны от нее точками $k=0$ (типы 1, 3). Ниже ребро $z=\pi$ условно изображено в виде оси s, на которой отмечены точки смены знака кривизны (сверху) и кручения (снизу). По геометрическому характеру ребра $z=0$ типы 3, 4 подразделены на подтипы а, б. Случай а$_2$ соответствует поверхностям с $|p|=1$ (или $|q|=1$), у которых ребро $z=\pi$ асимптотически при $s\to-\infty$ (или при $s\to+\infty$) стремится к окружности, лежащей в плоскости, параллельной координатной плоскости $O\xi\eta$.

Тип 1:

$(|p|-1)(|q|-1)>0,\ pq>0.$

$k=0$ $\quad k=\infty$ $\quad k=0$ $\quad s$

$\varkappa=0$ $\quad \varkappa=\infty$

Ребро $z=0$ — кривая с постоянным $\varkappa\neq0$ и ограниченной $k>0$. На рис. 1 изображена такая поверхность при $p=2,\ q=9$.

Тип 2:

$(|p|-1)(|q|-1)\geqslant0,\ pq<0.$

кривизна k ограничена и не меняет знак $\quad s$

кручение $\varkappa$ ограничено и не меняет знак

Ребро $z=0$ — кривая с постоянным кручением $\varkappa\neq0$ и ограниченной кривизной $k>0$.

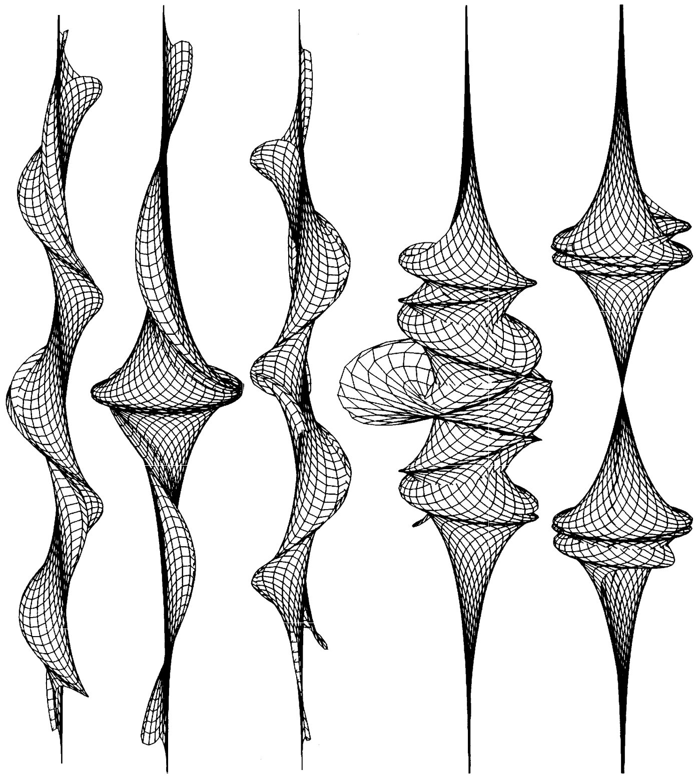

Рис. 1 *Рис. 2* *Рис. 3* *Рис. 4* *Рис. 5*

С л у ч а й а$_1$: $|p|\neq1,\ |q|\neq1$.

С л у ч а й а$_2$: $|p|=1$ или $|q|=1$. Такая поверхность при $p=-1,\ q=5$ изображена на рис. 2.

Тип 3:

$(|p|-1)(|q|-1)\leqslant0,\ pq>0$:

$k=0$ $\quad k=\infty$ $\quad k=0$ $\quad s$

$\varkappa=\infty$

Подтип а: $pq\neq1$. Ребро $z=0$ — кривая с постоянным $\varkappa\neq0$ и ограниченной $k>0$.

С л у ч а й а$_1$: $|p|\neq1,\ |q|\neq1$. На рис. 3 представлена такая поверхность при $p=1/2,\ q=9$.

С л у ч а й а$_2$: $|p|=1$ или $|q|=1$.

Подтип б: $pq=1$. Ребро $z=0$ — плоская кривая с самопересечением, напоминающая декартов лист. Эта поверхность при $p=q=1$ изображена на рис. 4.

Тип 4:

$(|p|-1)(|q|-1)<0,\ pq<0$:

k ограничена и не меняет знак $\quad s$

$\varkappa=0$ $\quad \varkappa$ ограничено

Подтип а: $pq\neq-1$. Ребро $z=0$ — кривая с постоянным $\varkappa\neq0$ и ограниченной $k>0$.

Подтип б: $pq=-1$. Ребро $z=0$ — точка (острие). На рис. 5 представлена такая поверхность при $p=9/10,\ q=-10/9$.

Таким образом, все псевдосферические поверхности, соответствующие двухсолитонным решениям, могут быть подразделены на восемь типов: 1 (рис. 1), 2а$_1$, 2а$_2$ (рис. 2), 3а$_1$ (рис. 3), 3а$_2$, 3б (рис. 4), 4а, 4б (рис. 5).

Автор благодарен Д.В. Тихомирову за любезно предоставленные иллюстрации и профессору А.Г. Попову за полезное обсуждение работы.

Литература

1. *Давыдов А.С.* Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наукова думка, 1984.
2. *Хуберт А.* Теория доменных стенок в упорядоченных средах. М.: Мир, 1977.
3. *Skyrme T.H.R.* // Proc. Roy. Soc. 1981. **A262**. P. 237.
4. *Позняк Э.Г., Попов А.Г.* // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1991. Т. 23. С. 99.
5. *Попов А.Г.* Точное решение основных уравнений теории поверхностей для односолитонного решения уравнения sin-Гордона: Деп. ВИНИТИ № 4336-В86 от 12.06.86.
6. *Bianchi L.* Lezioni di geometria differenziale. Vol. 1, Parte 2. Bologna, 1927.
7. *Тихомиров Д.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 1. С. 19 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 1. P. 20).

Поступила в редакцию
21.11.01

УДК 517.958; 621.372.8

ПОВЕДЕНИЕ ВЛОЖЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

М.Д. Малых

(*кафедра математики*)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Приведен пример задачи, близкой к спектральной задаче теории волноводов со вставкой, вложенные собственные значения которой исчезают при малом изменении коэффициентов, характеризующих заполнение. Рассмотрение этой задачи основано на методе Фубини.

В настоящее время известны многочисленные примеры волноведущих систем, обладающих собственными значениями, вложенными в непрерывный спектр [1–6]. Однако не вполне ясно, сохранятся ли они при малом изменении границы или заполнения волновода, поскольку в общем случае вложенное собственное значение при малых возмущениях может превращаться в комплексный резонанс [4, 7, 8].

В настоящей работе рассмотрен простой пример спектральной задачи, у которой исчезают вложенные собственные значения, а именно:

$$\begin{cases} u'' + (k^2 q(x) - \alpha)u = k^2 p(x) v, \\ v'' + (k^2 q(x) - \beta)v = k^2 p(x) u. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\alpha < \beta$, а функции $q(x) - 1$ и $p(x)$ — аналитические функции, регулярные в любой конечной точке вещественной оси и убывающие быстрее любой экспоненты.

Эта задача является модельным приближением для изучения спектральной задачи

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 q(x,y) u = 0, \\ u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = 0, \\ u \in L_2(\Omega) \end{cases} \tag{2}$$

в полом волноводе постоянного сечения

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1, \;\; y \in [0, +\pi]\},$$

заполненном неоднородным веществом, которое характеризуется кусочно-постоянной функцией $q(x,y)$.

В силу полноты системы тригонометрических функций решение (2) всегда можно представить в виде

$$u(x, y;\, k) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x;\, k) \sin(ny),$$

причем $u_n(x) \in L^2(\mathbb{R}^1) \cap C^1$. Подставляя это выражение в (2), получим вместо (2) бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u_n'' - n^2 u_n + k^2 \sum\limits_{m=1}^{\infty} q_{n,m} u_m = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^1} dx\, |u_n(x)|^2 < \infty, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$q_{n,m}(x) = \int\limits_S dy\, q(x,y) \sin(ny) \sin(my).$$

Нетрудно видеть, что задача (1) является весьма частным случаем задачи (3), однако можно надеяться, что и она передает характерные особенности поведения спектра задачи (2).

Предположим, что у задачи (1) существует вложенное собственное значение $k^2 \in (\alpha, \beta)$ и ему отвечает собственная функция $(u_1(x),\, v_1(x)) \in L^2(\mathbb{R}^1)$. Система (1) имеет еще три линейно-независимых