УДК 517.947.42

ЗАДАЧА ФИЗИКИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ СО СМЕШАННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ, ЗАДАННЫМ НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОДОВ, ЛЕЖАЩИХ ВДОЛЬ ПРЯМОЙ

К.В. Прозоров, П.А. Крутицкий

(*кафедра математики*)

E-mail: kprozorov@mail.ru

Рассмотрена краевая задача для периодических гармонических функций вне периодической системы прямолинейных разрезов на плоскости. При этом на одной стороне каждого разреза задано условие Дирихле, а на другой — условие с косой производной. С помощью теории краевых задач для аналитических функций построено явное решение задачи. Доказана единственность решения. Задача описывает распределение потенциала электрического поля в замагниченной полупроводниковой пленке с периодической системой прямолинейных электродов.

Постановка задачи и теорема единственности

На плоскости в декартовых координатах $x = (x_1, x_2)$ рассмотрим бесконечное число прямолинейных разрезов $\Gamma_0, \Gamma_{\pm1}, \Gamma_{\pm2}, \ldots$, расположенных вдоль оси Ox_1, с периодом 2π. Разрезы $\Gamma_0, \Gamma_{\pm1}, \Gamma_{\pm2}, \ldots$ представляют собой отрезки оси Ox_1 с концами в точках $2\pi m \pm a$, где $0 < a < \pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Совокупность отрезков Γ_m, $m \in \mathbb{Z}$, будем называть контуром Γ. За положительное направление обхода этого контура выберем направление оси Ox_1. Через Γ^+ и Γ^- будем обозначать левый и правый берега Γ. Предельные значения функций на Γ^+ и Γ^- будем обозначать индексами «$+$» и «$-$» соответственно.

Говорят, что функция $u(x) = u(x_1, x_2)$ принадлежит классу гладкости H^0_Γ, если

1) $u(x) \in C^0(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma})$, т.е. $u(x)$ непрерывна вне Γ, непрерывно продолжима на Γ слева и справа во всех точках, а также непрерывно продолжима на концы $(2\pi m - a, 2\pi m + a)$ отрезков Γ_m, где $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$;

2) $u_{x_1}, u_{x_2} \in C^0(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} \setminus X)$, где X — множество концов контура Γ;

3) на концах разрезов функции u_{x_1}, u_{x_2} могут иметь интегрируемые особенности, т.е. при $x \to d \in X$ справедлива оценка $|u_{x_j}| \leqslant A|x-d|^\delta$, $j = 1, 2$, где константы $\delta > -1$, $A > 0$.

Дадим математическую постановку задачи, которая изучается ниже.

Задача $\mathfrak{K}$. Найти $u(x) = u(x_1, x_2)$ из класса H^0_Γ, гармоническую вне Γ, удовлетворяющую условию периодичности

$$u(x_1, x_2) = u(x_1 + 2\pi m, x_2), \quad \text{где} \quad m \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$

граничным условиям

$$u^+(x_1, 0)\big|_{\Gamma^+} = Q_1(x_1), \tag{1}$$

$$u^-_{x_2}(x_1, 0)\big|_{\Gamma^-} - \beta u^-_{x_1}(x_1, 0)\big|_{\Gamma^-} = Q_2(x_1), \tag{2}$$

а также условиям

$$|u| < C, \quad |x_2| \to \infty, \tag{3}$$

$$u_{x_2} \rightrightarrows 0, \quad |x_2| \to \infty. \tag{4}$$

Через $Q_1(x_1)$, $Q_2(x_1)$ обозначены заданные на Γ действительные функции, такие, что $Q_1(x_1) \in C^{1,\lambda}[-a, a]$, $Q_2(x_1) \in C^{0,\lambda}[-a, a]$, $\lambda \in (0, 1]$; $Q_{1,2}(x_1) = Q_{1,2}(x_1 + 2\pi m)$, $m \in \mathbb{Z}$.

Задача $\mathfrak{K}$ возникает при изучении эффекта Холла в полупроводниках [1, 2]. Условие (1) отвечает заданию потенциала, а (2) — заданию плотности нормального тока на сторонах разрезов (электродов) в полупроводниковой пленке, расположенной в постоянном магнитном поле.

Т е о р е м а 1. *Если решение задачи* $\mathfrak{K}$ *существует, то оно единственно.*

Доказательство основано на методе энергетических тождеств [2].

Построение решения

Решение задачи $\mathfrak{K}$ будем строить методом, предложенным в [3]. Условие (1) эквивалентно следующим двум условиям:

$$u^+_{x_1}(x_1, 0)\big|_{\Gamma^+} = \widetilde{Q}_1(x_1) \equiv Q_1'(x_1), \tag{5}$$

$$u(-a, 0) = Q_1(-a).$$

Перейдем от декартовой плоскости к комплексной: $w = x_1 + ix_2$. Возьмем функцию $v(x)$, сопряженную к $u(x)$ в смысле соотношений Коши–Римана. Вообще говоря, $v(x)$ — многозначная гармоническая функция. Рассмотрим многозначную аналитическую функцию

$$\Psi(w) = u(x) + iv(x). \tag{6}$$

В силу условий Коши–Римана

$$\Psi_w(w) = u_{x_1} - iu_{x_2} \equiv \Omega_0(w), \tag{7}$$

где $\Omega_0(w)$ — однозначная аналитическая функция, так как сама функция $u(x)$ и ее частные производные по x_1, x_2 — однозначные гармонические функции.

Перепишем (2), (5) в виде

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\Omega_0(x_1,0)|_{\Gamma+}=\widetilde{Q}_1(x_1),\\ &\operatorname{Re}\left[(i-\beta)\Omega_0(x_1,0)\right]|_{\Gamma-}=Q_2(x_1). \end{aligned} \tag{8}$$

Потребуем, чтобы

$$|\Omega_0(w)| \rightrightarrows 0 \quad \text{при} \quad |x_2|\to\infty, \tag{9}$$

тогда условие (4) будет выполнено.

Будем говорить, что аналитическая функция $F(w)$ принадлежит классу h^0_Υ, если она кусочно-голоморфна с линией скачков Υ, имеет конечный порядок на бесконечности, непрерывно продолжима на Υ слева и справа во всех точках, за исключением концов Υ, где может иметь интегрируемые особенности (см. п. 3 в определении H^0_Γ).

Задача $\mathfrak{K}$ относительно функции $u(x)$ сведена к задаче Римана–Гильберта относительно однозначной аналитической функции $\Omega_0(w)$.

Задача $\mathfrak{R}_w$. Найти функцию $\Omega_0(w)$ из класса h^0_Γ, удовлетворяющую условию периодичности $\Omega_0(w)=\Omega_0(w+2\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$, условиям на бесконечности (9) и граничным условиям (8).

Рассмотрим конформное отображение комплексной плоскости w на плоскость z такое, что $z=\exp(iw)$.

При этом разрезы Γ на плоскости w перейдут в разрез L вдоль единичной окружности: $L=\{z\colon |z|=1,\ -a<\arg z<a\}$. Введем на плоскости z полярные координаты: $|z|$ — полярный радиус и $\theta=\arg z$ — полярный угол. При этом Γ^+ переходит в $L^+=\{z\colon |z|=1-0;\ \theta\in(-a,a)\}$, а Γ^- — в $L^-=\{z\colon |z|=1+0;\ \theta\in(-a,a)\}$.

Положим $q_1(t)=\widetilde{Q}_1(t)$, $q_2(t)=Q_2(t)$, где $t=\exp(i\theta)$ и

$$\Phi(z)=\Omega_0(w(z)). \tag{10}$$

Тогда условия (8) преобразуются в следующие условия на L:

$$\operatorname{Re}\Phi^+(t)\big|_{L^+}=q_1(t), \quad \operatorname{Re}\left[(i-\beta)\Phi^-(t)\right]\big|_{L^-}=q_2(t), \tag{11}$$

где $t=\exp(i\theta)$, $\theta\in(-a,a)$, и функция $\Phi(z)$ должна принадлежать классу h^0_L. Задача Римана–Гильберта $\mathfrak{R}_z$ на плоскости z, соответствующая задаче $\mathfrak{R}_w$ на плоскости w, будет иметь следующий вид.

Задача $\mathfrak{R}_z$. Найти функцию $\Phi(z)$ из класса h^0_L, удовлетворяющую граничным условиям (11), а также условию $\Phi(0)=\Phi(\infty)=0$.

Последнее условие в $\mathfrak{R}_z$ вытекает из (9). Задача Римана–Гильберта для функции $\Phi(z)$ изучалась ранее [4–6]. Будем следовать работе [6]. Чертой сверху будем обозначать комплексное сопряжение. Так как условия (11) аналогичны следующим: $\Phi^+(t)+\overline{\Phi^+(t)}=2q_1(t)$ на L^+, $(i-\beta)\Phi^-(t)+\overline{(i-\beta)\Phi^-(t)}=2q_2(t)$ на L^-, то, вводя функции $\varphi_1(z)=\Phi(z)$, $\varphi_2(z)=\varphi_{1*}(z)=\overline{\Phi\left((\overline{z})^{-1}\right)}$, приходим к следующей векторной задаче сопряжения [6].

Задача $\mathfrak{S}$. Найти вектор $(\varphi_1(z),\varphi_2(z))$ такой, что функции $\varphi_{1,2}$ принадлежат классу h^0_L, удовлетворяют граничным условиям на L

$$\begin{aligned} &\varphi_1^+(t)+\varphi_2^-(t)=2q_1(t),\\ &(i-\beta)\varphi_1^-(t)+(-i-\beta)\varphi_2^+(t)=2q_2(t) \end{aligned} \tag{12}$$

и $\varphi_j(0)=\varphi_j(\infty)=0$, $j=1,2$.

Согласно [7], всякое решение $(\varphi_1(z),\varphi_2(z))$ задачи $\mathfrak{S}$ порождает решение $\Phi(z)$ задачи $\mathfrak{R}_z$:

$$(\varphi_1(z)+\varphi_{2*}(z))/2=\Phi(z). \tag{13}$$

Вводя новые неизвестные функции

$$\begin{aligned} \nu_1(z)&=C^{\frac14}\varphi_1(z)+C^{-\frac14}\varphi_2(z),\\ \nu_2(z)&=-C^{\frac14}\varphi_1(z)+C^{-\frac14}\varphi_2(z), \end{aligned} \tag{14}$$

сведем двумерную задачу $\mathfrak{S}$ к двум одномерным относительно $\nu_1(z),\nu_2(z)$ с граничными условиями на L:

$$\nu_1^+(t)=G\nu_1^-(t)+C^{\frac14}f_1(t)+C^{-\frac14}f_2(t), \tag{15}$$

$$\nu_2^+(t)=-G\nu_2^-(t)-C^{\frac14}f_1(t)+C^{-\frac14}f_2(t), \tag{16}$$

где $f_1(t)=2q_1(t)$, $f_2(t)=-2q_2(t)C^{\frac12}/\sqrt{1+\beta^2}$, $C^{\pm\frac14}=\mathrm{e}^{\mp\frac{i}{2}\operatorname{arcctg}\beta}$, $G\equiv -C^{\frac12}=-\mathrm{e}^{-i\operatorname{arcctg}\beta}$. Функции $\nu_{1,2}(z)$ должны принадлежать h^0_L и удовлетворять требованию $\nu_j(0)=\nu_j(\infty)=0$, $j=1,2$.

Решения таких одномерных задач сопряжения для ν_1 и ν_2 легко строятся в явном виде методами [3–5, 7].

Для соответствующих однородных задач сопряжения граничные условия на L имеют вид $\psi_1^+(t)=G\psi_1^-(t)$, $\psi_2^+(t)=-G\psi_2^-(t)$.

Далее, введем обозначения $T_1(z)=\left(z-\mathrm{e}^{-ia}\right)^\sigma\times$ $\times\left(z-\mathrm{e}^{ia}\right)^{1-\sigma}$, $T_2(z)=\left(z-\mathrm{e}^{-ia}\right)^{\frac12+\sigma}\cdot\left(z-\mathrm{e}^{ia}\right)^{\frac12-\sigma}$, где $\sigma=(1/2)-(1/2\pi)\operatorname{arcctg}\beta$. Используя их, можно написать канонические решения однородных задач: $\psi_1(z)=i\exp\left[i\left(1/2-\sigma\right)a\right]/T_1(z)$, $\psi_2(z)=i\exp\left(-i\sigma a\right)/T_2(z)$. Заметим, что эти решения удовлетворяют требованию $(\psi_j(z))_*=z\psi_j(z)$, $j=1,2$.

Положим $t=\mathrm{e}^{i\theta}$ и введем функции

$$\Theta_1(\theta)=\left|\sin\left((\theta+a)/2\right)\right|^\sigma\cdot\left|\sin\left((\theta-a)/2\right)\right|^{1-\sigma}, \tag{17}$$

$$\Theta_2(\theta)=\left|\sin\left((\theta+a)/2\right)\right|^{\frac12+\sigma}\cdot\left|\sin\left((\theta-a)/2\right)\right|^{\frac12-\sigma}, \tag{18}$$

где θ — азимутальный угол полярной системы координат. Тогда предельные значения $\psi_{1,2}$ на L примут вид

$$\psi_1^\pm=-\frac12\exp\left[\pm i\sigma\pi-\frac{i\theta}{2}\right]\cdot\frac{1}{\Theta_1(\theta)},$$

$$\psi_2^\pm=\mp\frac{i}{2}\exp\left[\pm i\sigma\pi-\frac{i\theta}{2}\right]\cdot\frac{1}{\Theta_2(\theta)}.$$

Исчезающие на бесконечности решения неоднородных задач сопряжения для $\nu_1(z)$ и $\nu_2(z)$ с граничными условиями (15), (16) выглядят так:

$$\nu_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\psi_j(z)\int\limits_L \frac{zF_j(\xi)}{(\xi - z)\xi}\,d\xi + E_j\psi_j(z), \quad j = 1, 2, \tag{19}$$

где E_j — произвольные константы, а $F_j(t) = [-(-1)^j C^{\frac14} f_1(t) + C^{-\frac14} f_2(t)]/\psi_j^+(t)$. Указанные решения удовлетворяют всем условиям задач, кроме требований $\nu_j(0) = 0$, $j = 1, 2$. Подберем константы E_1, E_2 так, чтобы эти требования выполнялись, тогда

$$E_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F_1(\xi)}{\xi}\,d\xi, \quad E_2 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F_2(\xi)}{\xi}\,d\xi. \tag{20}$$

Подставив в (19) выражения (20), получаем

$$\nu_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\psi_j(z)\int\limits_L \frac{zF_j(\xi)}{(\xi - z)\xi}\,d\xi, \quad j = 1, 2. \tag{21}$$

Теперь решение задачи $\mathfrak{S}$ можно выписать по формулам (14), (21) через $\nu_{1,2}$. Пользуясь (13), выпишем решение задачи $\mathfrak{R}_z$:

$$\Phi(z) = \frac12 C^{-\frac14} z\left\{\psi_1(z)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F_1(\xi)}{(\xi - z)\xi}\,d\xi - \right.$$
$$\left. - \psi_2(z)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F_2(\xi)}{(\xi - z)\xi}\,d\xi\right\}.$$

Согласно (6), решение $\mathfrak{K}$ будем искать в виде $u(x) = \operatorname{Re}\Psi(w)$. Воспользовавшись (7), (10), получим, что $\Psi_w(w) = \Omega_0(w(z)) = \Phi(z)$. Следовательно,

$$\Psi(w) = \int\limits_{w_0}^{w} \Psi_w(w)\,dw + k = \int\limits_{w_0}^{w} \Omega_0(w)\,dw + k =$$
$$= \int\limits_{z(w_0)}^{z(w)} \Phi(z) w'_z\,dz + k = -i\int\limits_{z(w_0)}^{z(w)} \frac{\Phi(z)}{z}\,dz + k, \tag{22}$$

где $z = \exp(iw)$, $w = -i\ln(z)$, $w'_z = -i/z$, k — произвольная комплексная постоянная. Напомним, что по построению $\Phi(0) = 0$ и представим $\Phi(z)/z$ в виде интеграла типа Коши:

$$\frac{\Phi(z)}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{1}{t - z}\frac{\rho(t)}{t}\,dt. \tag{23}$$

Пользуясь формулами Сохоцкого, находим

$$\rho(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) =$$
$$= \frac12 t_0\left\{\left(C^{-\frac14} + C^{-\frac34}\right)\psi_1^+(t_0)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F_1(\xi)}{(\xi - t_0)\xi}\,d\xi + \right.$$
$$\left. + \left(C^{-\frac34} - C^{-\frac14}\right)\psi_2^+(t_0)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F_2(\xi)}{(\xi - t_0)\xi}\,d\xi\right\} +$$
$$+ \frac12\left(f_1 - \frac{f_2}{C}\right).$$

Положим $t_0 = \exp(i\theta_0)$ и $\hat\rho(\theta_0) = \rho(t_0)$, тогда

$$\operatorname{Re}\hat\rho(\theta_0) =$$
$$= \widetilde{Q}_1(\theta_0) + \frac{\beta}{\beta^2 + 1}Q_2(\theta_0) - \frac{1}{\beta^2 + 1}\sum_{j=1}^{2}\frac{(-1)^j}{4\pi\Theta_j(\theta_0)} \times$$
$$\times \int\limits_{-a}^{a} \frac{\left(\sqrt{\beta^2 + 1}\cdot\widetilde{Q}_1(\theta) + (-1)^j Q_2(\theta)\right)\Theta_j(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta - \theta_0}{2}\right)}\,d\theta, \tag{24}$$

$$\operatorname{Im}\hat\rho(\theta_0) = -\frac{Q_2(\theta_0)}{\beta^2 + 1} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{2}\frac{(-1)^j}{4\pi\Theta_j(\theta_0)}\int\limits_{-a}^{a}\left\{\left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 1}} - (-1)^j\right)\widetilde{Q}_1(\theta) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2 + 1}} - (-1)^j\frac{\beta}{\beta^2 + 1}\right)Q_2(\theta)\right\}\frac{\Theta_j(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta - \theta_0}{2}\right)}\,d\theta. \tag{25}$$

Функции $\Theta_1(\theta)$, $\Theta_2(\theta)$ определены в (17), (18), а $\widetilde{Q}_1(\theta)$ — в (5).

Согласно (6), (22), (23), решение исходной задачи имеет вид

$$u(x) = \operatorname{Re}\Psi(w) =$$
$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{i}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\rho(t)}{t}\ln\left[z(w) - t\right]\,dt\right\} + D, \tag{26}$$

где D — вещественная константа.

Рассмотрим функцию $\ln[z(w) - t]$. Поскольку $z = e^{ix_1 - x_2}$, а $t = e^{i\theta_0}$, то $\ln[z(w) - t] = \ln r(x, \theta_0) + i\omega(x, \theta_0)$, где

$$r(x, \theta_0) = \left(e^{-2x_2} + 1 - 2e^{-x_2}\cos(x_1 - \theta_0)\right)^{\frac12}. \tag{27}$$

Функция $\omega(x, \theta_0)$ определена с точностью до $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, формулами

$$\begin{aligned} \sin\omega(x, \theta_0) &= (e^{-x_2}\sin x_1 - \sin\theta_0)/\,r(x, \theta_0), \\ \cos\omega(x, \theta_0) &= (e^{-x_2}\cos x_1 - \cos\theta_0)/\,r(x, \theta_0). \end{aligned} \tag{28}$$

При каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ под $\omega(x, \theta_0)$ будем понимать любую фиксированную ветвь этой функции, которая непрерывно изменяется по θ_0 от $-a$ к a.

Тогда $u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-a}^{a} \{\operatorname{Re} \hat{\rho}(\theta_0)\,(\omega(x,\theta_0)) + \operatorname{Im} \hat{\rho}(\theta_0) \times \times \ln r(x,\theta_0)\}\, d\theta_0 + D$. Поскольку ветвь $\omega(x,\theta_0)$ определяется с точностью до $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, то функция $u(x)$ будет однозначной только в том случае, если

$$\int\limits_{-a}^{a} \operatorname{Re} \hat{\rho}(\theta_0)\, d\theta_0 = 0. \tag{29}$$

Покажем, что это условие выполнено. В соответствии с (23)

$$\Phi(z) = z \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{1}{t-z} \cdot \frac{\rho(t)}{t}\, dt.$$

Следовательно, при $|z| \to \infty$

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{\rho(t)}{t}\, dt + O(|z|^{-1}).$$

Но по построению $\Phi(\infty) = 0$, поэтому

$$\int\limits_{L} \frac{\rho(t)}{t}\, dt = 0. \tag{30}$$

Отсюда следует $\int\limits_{-a}^{a} \operatorname{Re} \hat{\rho}(\theta_0)\, d\theta_0 = \int\limits_{-a}^{a} \operatorname{Im} \hat{\rho}(\theta_0)\, d\theta_0 = 0$. Тем самым условие (29) выполнено. Постоянную D найдем из условия $u(a,0) = Q_1(a)$:

$$D = Q_1(a) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-a}^{a} \left\{ \operatorname{Re} \hat{\rho}(\theta_0) \frac{\theta_0}{2} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{Im} \hat{\rho}(\theta_0) \cdot \ln\left(2 \sin \frac{a-\theta_0}{2}\right) \right\} d\theta_0.$$

В итоге получаем

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-a}^{a} \left\{ \operatorname{Re} \hat{\rho}(\theta_0) \left(\frac{\theta_0}{2} - \omega(x,\theta_0) \right) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{Im} \hat{\rho}(\theta_0) \cdot \ln \left[\frac{\sin \frac{a-\theta_0}{2}}{r(x,\theta_0)} \right] \right\} d\theta_0 + Q_1(a), \tag{31}$$

где $\operatorname{Re} \hat{\rho}(\theta_0)$ и $\operatorname{Im} \hat{\rho}(\theta_0)$ даются выражениями (24) и (25) и использованы функции из (27), (28). Легко проверить, что $u(x) \in H^0_\Gamma$. Покажем, что $u(x)$ удовлетворяет условиям (3), (4), для этого используем выражение для $u(x)$ в виде (26). Если $x_2 \to +\infty$, то $\ln(z(w) - t) = \ln(\mathrm{e}^{ix_1 - x_2} - t) = \ln(-t) + o(1)$; здесь и далее через $o(1)$ обозначены функции, которые равномерно стремятся к нулю при $|x_2| \to \infty$. Подставляя эту формулу в (26), докажем (3) при $x_2 \to +\infty$. Если $x_2 \to -\infty$, то $\ln(z(w) - t) = \ln(\mathrm{e}^{ix_1 - x_2} - t) = ix_1 - x_2 + o(1)$. Подставляя это соотношение в (26) и используя (30), докажем (3) при $x_2 \to -\infty$. Тем самым функция $u(x)$ удовлетворяет условию (3) при $x_2 \to \pm\infty$. Более того,

$$\lim_{x_2 \to \pm\infty} u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-a}^{a} \left\{ \mp \operatorname{Re} \hat{\rho}(\theta_0) \frac{\theta_0}{2} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{Im} \hat{\rho}(\theta_0) \cdot \ln\left(\sin \frac{a-\theta_0}{2}\right) \right\} d\theta_0 + Q_1(a).$$

Перейдем к оценке (4). При $|x_2| \to \infty$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \ln(\mathrm{e}^{ix_1 - x_2} - t) = -\frac{\mathrm{e}^{ix_1 - x_2}}{\mathrm{e}^{ix_1 - x_2} - t} = o(1).$$

Пользуясь представлением (26) и учитывая последнюю формулу, можно показать, что функция $u(x)$ удовлетворяет условию (4).

Таким образом, решение задачи $\mathfrak{K}$ построено. Справедлива

Т е о р е м а 2. *Решение задачи $\mathfrak{K}$ существует и дается формулой* (31).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-01067) и INTAS (грант YSF 00-17).

Литература

1. *Владимиров В.В., Волков А.Ф., Мейлихов Е.З.* Плазма полупроводников. М.: Атомиздат, 1979.
2. *Бушева Л.В., Крутицкий П.А.* // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. **3**, № 3. С. 739.
3. *Крутицкий П.А.* // Матем. моделирование. 1990. **2**, № 9. С. 114.
4. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
5. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.
6. *Крутицкий П.А.* // ЖВМ и МФ. 1990. **30**, № 11. С. 1689.
7. *Крутицкий П.А.* // Матем. моделирование. 1990. **2**, № 4. С. 143.

Поступила в редакцию
10.12.01