УДК 517.958: 621.372.8

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В МНОГОСВЯЗНОЙ ВОЛНОВОДНОЙ ОБЛАСТИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ГРАНИЦЕЙ

Ю.Ю. Крюкова, В.П. Моденов

(*кафедра математики*)

E-mail: jkrukova@mail.ru

Проведено теоретическое обоснование вычислительного алгоритма решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца в многосвязной волноводной области с кусочно-постоянной границей.

Введение

Интерес к решению задачи дифракции электромагнитных волн на нерегулярностях в плоском волноводе (см., напр., [1]), таких, как разветвления, диафрагмы, скачки поперечного сечения и т. д. (рис. 1), обусловлен ее практической значимостью в современной радиофизике, микроэлектронике и других отраслях науки. Неоднородности подобного типа являются важной составной частью радиоэлектронной аппаратуры СВЧ и КВЧ диапазонов [2]. Возрастающие требования к качеству и функциональным возможностям волноводных узлов делают актуальным их математическое моделирование.

Рассматриваемая задача относится к классу краевых задач математической физики, возникающих при математическом моделировании явлений распространения и дифракции волн на неоднородностях в бесконечных, многосвязных, волноводных областях с координатными кусочно-постоянными границами и кусочно-постоянным заполнением. Характерной особенностью таких задач является необходимость рассмотрения обобщенного решения [3–5], учитывающего «условие на ребре», и постановка условий излучения на бесконечности [6]. Целью настоящей работы является теоретическое обоснование вычислительного алгоритма решения данной задачи. Исследуется дифракция волны H_{10} при падении ее на нерегулярности (см. рис. 1). В основу алгоритма положен метод проекционного сшивания [7]. Решение в каждой частичной области представляется в виде разложения по нормальным волнам каждого волновода, коэффициенты разложений находятся из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), получаемой при применении метода проекционного сшивания [8]. Система редуцируется к конечной и решается численно.

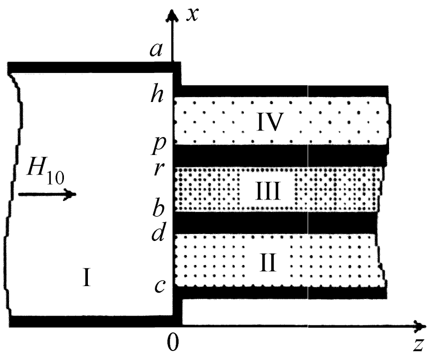

Рис. 1. Модель волновода, включающая в себя основные типы скачкообразных нерегулярностей: черные области — металл, разной штриховкой показаны различные заполнения областей (II, III, IV)

Одно из центральных мест в обосновании применяемого численного метода занимают теоремы существования и единственности обобщенного решения для уравнения Гельмгольца [9] в рассматриваемой области и вопрос о сходимости решения редуцированной СЛАУ к точному решению задачи [10].

1. Постановка краевой задачи

Пусть Ω — неограниченная область в R^2, имеющая неограниченное дополнение, $\partial\Omega$ — граница области. Вне круга достаточно большого радиуса R_0 область представляет собой совокупность конечного числа J $(J=\mathrm{IV})$ цилиндрических («волноводных») выходов на бесконечность Ω_j $(j=\mathrm{I},\mathrm{II},\ldots,J)$ [9]. Область Ω_0 внутри круга радиуса R_0 является многосвязной, а ее граница $\partial\Omega_0$ имеет конечное множество G точек разрыва, т. е. множество $\partial\Omega_0\setminus G$ является объединением кусочно-постоянных функций в R^2.

Сформулируем в области Ω краевую задачу. Рассмотрим уравнение Гельмгольца:

$$Lu=\Delta u+K\,(x)\,u=-zu,\quad x\in\Omega, \tag{1}$$

где $z=\nu+i\tau,\ \nu>0,\ \tau\geqslant 0$; переменный коэффициент уравнения

$$K(x)=\begin{cases}K_j=k^2\varepsilon^j, & x\in\Omega_j,\quad j=\mathrm{I},\mathrm{II},\ldots,J,\\ K_0(x), & x\in\Omega_0,\end{cases}$$

K_j — вещественные числа $(K_j>0)$, $K_0(x)$ — комплекснозначная функция с постоянной мнимой частью, $\operatorname{Re}K_0(x)>0,\ K_0(x)\in L_2(\Omega)$, ε^j — диэлектрическая проницаемость среды.

Поставим граничные условия:

$$u=0,\quad x\in\partial\Omega\setminus G. \tag{2}$$

Условия на бесконечности сформулируем в виде парциальных условий излучения [6]:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z^j} - i\gamma_n^j u\right|_{z^j=\mathrm{const}} = 0, \qquad (3)$$

где $\gamma_n^j = (K_j - \lambda_n^j)^{1/2}$ — постоянные распространения нормальных волн ($\mathrm{Re}\,\gamma_n^j > 0$); λ_n^j — собственные значения задач Штурма–Лиувилля для поперечных сечений $z^j = \mathrm{const}$ с граничными условиями первого рода.

В особых точках G_t ($t = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, T$) должны выполняться условия на ребре.

Невозможность классической постановки задачи для уравнения Гельмгольца (1) с переменными коэффициентами уравнения $K(x)$ в многосвязной бесконечной области с кусочно-постоянными коэффициентами приводит к необходимости рассмотрения обобщенного решения данной задачи.

2. Теоремы существования и единственности обобщенного решения

Рассмотрим оператор L краевой задачи (1)–(2) в пространстве $L_2(\Omega)$. Это самосопряженный оператор с вещественным спектром, осуществляющий при комплексном z изоморфизм подмножеств в $L_2(\Omega)$. При $\mathrm{Im}\,z \to 0$ можно произвести расширение оператора L из $L_2(\Omega)$ на линейное топологическое пространство $\tilde{W}_2^2(\Omega)$, элементами которого являются функции u, принадлежащие $\{W_2^2(\Omega_{R,\rho})\ \forall R > 0,\ \forall \rho > 0\}$, $\Omega_{R,\rho}$ — часть области Ω внутри круга радиуса R, за исключением окрестностей особых точек радиуса ρ. Топология этого пространства определяется семейством полунорм $\left\{\left\|u; W_2^2(\Omega_{R,\rho})\right\|\right\}$. Однозначность такого расширения обеспечивается заданием условий излучения (3) в выходах на бесконечность. Можно показать, что условие конечности энергии поля в окрестности особой точки G_t будет выполнено, если обобщенное решение данной краевой задачи принадлежит пространству $\tilde{W}_2^2(\Omega) \cap \left(\bigcup\limits_{t=1}^{T} L_2(G_t)\right)$.

Пусть $\overset{0}{C}{}^2(\bar{\Omega})$ — подмножество множества $C^2(\bar{\Omega})$, состоящее из функций, равных нулю на $\partial\Omega$. Тогда $\tilde{W}_{2,0}^2(\Omega)$ — замыкание множества $\overset{0}{C}{}^2(\bar{\Omega})$ в пространстве $\tilde{W}_2^2(\Omega)$.

Пусть L' — линейный оператор в $L_2(\Omega)$ с областью определения

$$D(L') = \big\{u : u \in C^2(\bar{\Omega}) \bigcap L_2(\Omega),\quad L'u = Lu \in L_2(\Omega),\quad u = 0,\ \ x \in \partial\Omega \setminus G\big\},$$

$\tilde{L}$ — замыкание оператора L' в $L_2(\Omega)$. Для функций $u \in \tilde{W}_2^2(\Omega)$ при любых $R > 0$, $\rho > 0$ выполняется неравенство [4]

$$\left\|u; W_2^2(\Omega_R^\rho)\right\| \leqslant C\left(\left\|u; L_2(\Omega_{R+\delta}^{\rho-\eta})\right\| + \left\|Lu; L_2(\Omega_{R+\delta}^{\rho-\eta})\right\|\right),$$

где $\delta > 0$, $\rho > \eta > 0$; C — постоянная, зависящая от δ, η, $K(x)$, R. Отсюда следует, что область определения оператора $\tilde{L}$ состоит из функций

$$D(\tilde{L}) = \Big\{u\colon u \in \tilde{W}_{2,0}^2(\Omega) \bigcap L_2(\Omega),\quad \tilde{L}u \in L_2(\Omega),\quad u = 0,\quad x \in \partial\Omega\Big\}. \qquad (4)$$

Обозначим оператор краевой задачи (1), (4) через $A_z = \tilde{L} + zI$. Тогда определим обобщенное решение так:

1) обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца (1) в области Ω при комплексном z (случай учета поглощения в среде) будем называть функцию $u \in D(A_z) \subset L_2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1);

2) обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца (1) в области Ω при вещественном $z = \lambda > 0$ (без учета поглощения в среде) будем называть функцию $u \in \tilde{W}_{2,0}^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1), условию (4) и парциальным условиям излучения (3).

Обозначим пространство решений в первом случае F_z, во втором — F_λ.

Аналогично [9] можно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца* (1) *в области* Ω *существует и единственно.*

3. Численный алгоритм решения задачи

Вопрос о сходимости решения редуцированной СЛАУ к точному решению исследуем на примере задачи о разветвлении волновода полуплоскостью конечной толщины (рассматривается волновод, подобный изображенному на рис. 1, при $r = p = h$). Первый волновод (до разветвления) пуст ($\varepsilon^{\mathrm{I}} = 1$), второй и третий заполнены средой с диэлектрической проницаемостью ε^j (где $j = \mathrm{II}$ и III).

Требуется найти решения $u(x,z) = U^j(x,z)$ уравнения Гельмгольца

$$\Delta u(x,z) + k^2\varepsilon^j(x,z)u(x,z) = 0$$

в каждой из частичных областей: Ω_j, $\Omega_{\mathrm{I}} = \{(x,z)|\ 0 < x < a,\ -\infty < z < 0\}$, $\Omega_{\mathrm{II}} = \{(x,z)|\ c < x < d,\ 0 < z < \infty\}$ и $\Omega_{\mathrm{III}} = \{(x,z)|\ b < x < h,\ 0 < z < \infty\}$. Для искомых решений должны выполняться следующие условия.

1. Граничные условия Дирихле $u(x,z)|_{\partial\Omega} = 0$ на металлических боковых поверхностях.

2. Условия излучения и возбуждения на бесконечности:

$$U^{\mathrm{I}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\mathrm{I}}\varphi_n^{\mathrm{I}}(x)\exp\left(i\gamma_n^{\mathrm{I}}z\right) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n^{\mathrm{I}}\varphi_n^{\mathrm{I}}(x)\exp\left(-i\gamma_n^{\mathrm{I}}z\right),$$

$$
\begin{gathered}
U^{\mathrm{II}}=\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{\mathrm{II}} \varphi_n^{\mathrm{II}}(x) \exp \left(i \gamma_n^{\mathrm{II}} z\right)+ \\
+\sum_{n=1}^{\infty} B_n^{\mathrm{II}} \varphi_n^{\mathrm{II}}(x) \exp \left(-i \gamma_n^{\mathrm{II}} z\right), \\
U^{\mathrm{III}}=\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{\mathrm{III}} \varphi_n^{\mathrm{III}}(x) \exp \left(i \gamma_n^{\mathrm{III}} z\right)+ \\
+\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{\mathrm{III}} \varphi_n^{\mathrm{III}}(x) \exp \left(-i \gamma_n^{\mathrm{III}} z\right),
\end{gathered} \tag{5}
$$

где $A_n^{\mathrm{I}}, B_n^{\mathrm{II}}, C_n^{\mathrm{III}}$ — заданные, а $R_n^{\mathrm{I}}, Q_n^{\mathrm{II}}, T_n^{\mathrm{III}}$ — искомые коэффициенты разложения по нормальным волнам, $\{\varphi_n^j(x)\}$ — полные системы собственных функций задач Штурма–Лиувилля.

Нормировка выбрана в следующем виде:

$$
\int_0^a \varphi_n^{\mathrm{I}}(x) \varphi_m^{\mathrm{I}}(x)\, dx=\delta_{nm}, \quad \int_c^d \varphi_n^{\mathrm{II}}(x) \varphi_m^{\mathrm{II}}(x)\, dx=\delta_{nm},
$$

$$
\int_b^h \varphi_n^{\mathrm{III}}(x) \varphi_m^{\mathrm{III}}(x)\, dx=\delta_{nm}.
$$

3. Проекционные условия сшивания [8] в плоскости стыка волноводов, обеспечивающие непрерывность потока энергии:

$$
\begin{gathered}
\int_0^a U^{\mathrm{I}}\Big|_{z=0} \varphi_m^{\mathrm{I}}(x)\, dx=\int_c^d U^{\mathrm{II}}\Big|_{z=0} \varphi_m^{\mathrm{I}}(x)\, dx+ \\
+\int_b^h U^{\mathrm{III}}\Big|_{z=0} \varphi_m^{\mathrm{I}}(x)\, dx, \\
\int_c^d \frac{\partial U^{\mathrm{I}}}{\partial z}\Big|_{z=0} \varphi_m^{\mathrm{II}}(x)\, dx=\int_c^d \frac{\partial U^{\mathrm{II}}}{\partial z}\Big|_{z=0} \varphi_m^{\mathrm{II}}(x)\, dx, \\
\int_b^h \frac{\partial U^{\mathrm{I}}}{\partial z}\Big|_{z=0} \varphi_m^{\mathrm{III}}(x)\, dx=\int_b^h \frac{\partial U^{\mathrm{III}}}{\partial z}\Big|_{z=0} \varphi_m^{\mathrm{III}}(x)\, dx.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Подставляя разложения (5) в проекционные соотношения (6) и пользуясь условием нормировки, получим бесконечную СЛАУ для определения искомых амплитуд:

$$
Ax=By,
$$

где введены блочные операторы и векторы коэффициентов:

$$
A=\begin{vmatrix}
-\beta & -\alpha & I \\
0 & \gamma^{\mathrm{II}} & \alpha^T \gamma^{\mathrm{I}} \\
\gamma^{\mathrm{III}} & 0 & \beta^T \gamma^{\mathrm{I}}
\end{vmatrix}, \quad
B=\begin{vmatrix}
\beta & \alpha & -I \\
0 & \gamma^{\mathrm{II}} & \alpha^T \gamma^{\mathrm{I}} \\
\gamma^{\mathrm{III}} & 0 & \beta^T \gamma^{\mathrm{I}}
\end{vmatrix},
$$

$$
x=\left\|\begin{matrix} t \\ q \\ r \end{matrix}\right\|, \quad y=\left\|\begin{matrix} c \\ b \\ a \end{matrix}\right\|, \quad a=\left\|A_n^{\mathrm{I}}\right\|_{n=1,\ldots,\infty},
$$

$$
b=\left\|B_n^{\mathrm{II}}\right\|_{n=1,\ldots,\infty}, \quad c=\left\|C_n^{\mathrm{III}}\right\|_{n=1,\ldots,\infty},
$$

$$
r=\left\|R_n^{\mathrm{I}}\right\|_{n=1,\ldots,\infty}, \quad q=\left\|Q_n^{\mathrm{II}}\right\|_{n=1,\ldots,\infty},
$$

$$
t=\left\|T_n^{\mathrm{III}}\right\|_{n=1,\ldots,\infty}.
$$

Элементы матричных операторов имеют вид

$$
\alpha=\|\alpha_{mn}\|=\int_c^d \varphi_n^{\mathrm{II}}(x) \varphi_m^{\mathrm{I}}(x)\, dx,
$$

$$
\beta=\|\beta_{mn}\|=\int_b^h \varphi_n^{\mathrm{III}}(x) \varphi_m^{\mathrm{I}}(x)\, dx,
$$

$$
\gamma^j=\left\|\delta_{mn} \gamma_n^j\right\|_{m=1,\ldots,\infty}^{n=1,\ldots,\infty},
$$

индексом T обозначено транспонирование α- и β-матриц, I — единичная матрица.

Это уравнение будем решать методом редукции, заменяя его приближенным уравнением $A_n x=B_n y$, где все бесконечные матрицы заменяются на усеченные, а число учитываемых волн в каждом волноводе соответственно равно $N_{\mathrm{I}}=N_{\mathrm{II}}+N_{\mathrm{III}}$. Тогда получаем для столбцов коэффициентов и матриц:

$$
\begin{gathered}
a=\left\|A_n^{\mathrm{I}}\right\|_{n=1,\ldots,N_{\mathrm{I}}}, \quad b=\left\|B_n^{\mathrm{II}}\right\|_{n=1,\ldots,N_{\mathrm{II}}}, \\
c=\left\|C_n^{\mathrm{III}}\right\|_{n=1,\ldots,N_{\mathrm{III}}}, \quad r=\left\|R_n^{\mathrm{I}}\right\|_{n=1,\ldots,N_{\mathrm{I}}}, \\
q=\left\|Q_n^{\mathrm{II}}\right\|_{n=1,\ldots,N_{\mathrm{II}}}, \quad t=\left\|T_n^{\mathrm{III}}\right\|_{n=1,\ldots,N_{\mathrm{III}}}, \\
\alpha=\|\alpha_{mn}\|_{m=1,\ldots,N_{\mathrm{I}}}^{n=1,\ldots,N_{\mathrm{II}}}, \quad \beta=\|\beta_{mn}\|_{m=1,\ldots,N_{\mathrm{I}}}^{n=1,\ldots,N_{\mathrm{III}}}, \\
\gamma=\left\|\delta_{mn} \gamma_n^j\right\|_{m=1,\ldots,N_j}^{n=1,\ldots,N_j}.
\end{gathered}
$$

4. Обоснование сходимости

Для амплитуд нормальных волн $d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ введем координатные гильбертовы пространства $f_p=\left\{d: \sum_{n=1}^{\infty}|d_n|^2(\lambda_n^j)^p<\infty\right\}$, где $\lambda_n^j=K_j-(\gamma_n^j)^2$, p — вещественное число, со скалярным произведением $\langle d, g\rangle_p=\sum_{n=1}^{\infty} d_n \bar{g}_n(\lambda_n^j)^p$.

Рассмотрим операторы A и B. Из работы [10] известно, что для сходимости последовательности приближенных решений к точному решению достаточно непрерывности A^{-1} в f_1.

Утверждение 1. $A \in L(f_0, f_0)$, $A \in L(f_1, f_1)$.

Доказательство. Аналогично [8] можно доказать, что перечисленные ниже операторы непрерывны:

$$
\begin{gathered}
\alpha,\ \alpha^T,\ \beta,\ \beta^T \in L(f_0, f_0), \\
\alpha^T,\ \beta^T \in L(f_1, f_1), \quad \alpha, \beta \in L(f_{-1}, f_{-1}), \\
\gamma \in L(f_p, f_{p-1}), \quad \gamma^{-1} \in L(f_p, f_{p+1}),
\end{gathered}
$$

а непрерывность оператора A следует из диаграмм

$$\gamma^{-1}\alpha^T\gamma, \quad \gamma^{-1}\beta^T\gamma : f_0 \xrightarrow{\gamma^{-1}} f_1 \xrightarrow{\alpha^T} f_1 \xrightarrow{\gamma} f_0,$$
$$f_1 \xrightarrow{\gamma} f_0 \xrightarrow{\alpha^T} f_0 \xrightarrow{\gamma^{-1}} f_1.$$

Утверждение 2. *Существует постоянная* $C = \mathrm{const}$ *такая, что для x и y, удовлетворяющих уравнению $Ax = By$, имеет место оценка* $\|x\|_{f_{1/2}} \leqslant C\,\|y\|_{f_{1/2}}$.

Доказательство. Обозначим, аналогично [10], операцию умножения уравнений системы на $\bar{d} = (\bar{d}_1, \bar{d}_2, \ldots, \bar{d}_n)$ как умножение слева на D^*. Умножим второе уравнение слева на $\varepsilon_0(q+b)^*$, третье — на $\varepsilon_0(t+c)^*$, первое — на $\varepsilon_0(a-r)^*[\gamma^{\mathrm{I}}]^T$ и, применяя к первому уравнению условие: $\forall x, y$ $x^*y = \overline{(y^*x)}$, а также складывая второе и третье уравнения, получим

$$\varepsilon_0(q+b)^*\gamma^{\mathrm{II}}(q-b) + \varepsilon_0(t+c)^*\gamma^{\mathrm{III}}(t-c) =$$
$$= \varepsilon_0(q+b)^*\alpha^T\gamma^{\mathrm{I}}(a-r) + \varepsilon_0(t+c)^*\beta^T\gamma^{\mathrm{I}}(a-r),$$
$$\varepsilon_0(q+b)^*\overline{\alpha^T}\gamma^{\mathrm{I}}(a-r) + \varepsilon_0(t+c)^*\overline{\beta^T}\gamma^{\mathrm{I}}(a-r) =$$
$$= \varepsilon_0(a+r)^*\gamma^{\mathrm{I}}(a-r).$$

Теперь потребуем $\alpha^T = \overline{\alpha^T}$, $\beta^T = \overline{\beta^T}$ (что равносильно условию отсутствия поглощения), тогда можно приравнять правую часть первого уравнения и левую часть второго:

$$\varepsilon_0(q+b)^*\gamma^{\mathrm{II}}(q-b) + \varepsilon_0(t+c)^*\gamma^{\mathrm{III}}(t-c) =$$
$$= \varepsilon_0(a+r)^*\gamma^{\mathrm{I}}(a-r).$$

Введем обозначение $D^*\gamma D = \|D\|^2_\gamma$, тогда получим

$$\varepsilon_0\|q\|^2_{\gamma^{\mathrm{II}}} + \varepsilon_0\|t\|^2_{\gamma^{\mathrm{III}}} + \varepsilon_0\|r\|^2_{\gamma^{\mathrm{I}}} =$$
$$= \varepsilon_0 q^*\gamma^{\mathrm{II}}b - \varepsilon_0 b^*\gamma^{\mathrm{II}}q + \varepsilon_0\|b\|^2_{\gamma^{\mathrm{II}}} + \varepsilon_0 t^*\gamma^{\mathrm{III}}c -$$
$$- \varepsilon_0 c^*\gamma^{\mathrm{III}}t + \varepsilon_0\|c\|^2_{\gamma^{\mathrm{III}}} + \varepsilon_0 r^*\gamma^{\mathrm{I}}a - \varepsilon_0 a^*\gamma^{\mathrm{I}}r + \varepsilon_0\|a\|^2_{\gamma^{\mathrm{I}}}.$$

Равенство имеет структуру $\sum\alpha_k + i\sum\beta_k = F(\alpha_k, \beta_k)$, $\alpha_k, \beta_k \geqslant 0$, так как в левой части равенства мнимые части есть только у коэффициентов γ, причем знаки действительной и мнимой частей этих коэффициентов фиксированы для любого γ. Поэтому можно записать, что $\sum|\alpha_k| + \sum|\beta_k| \leqslant 2|F(\alpha_k, \beta_k)|$. Используя вышеприведенную оценку, получим

$$\varepsilon_0\|q\|^2_{\gamma^{\mathrm{II}}} + \varepsilon_0\|t\|^2_{\gamma^{\mathrm{III}}} + \varepsilon_0\|r\|^2_{\gamma^{\mathrm{I}}} \leqslant$$
$$\leqslant 2\Big(\varepsilon_0\|q\|_{\gamma^{\mathrm{II}}}\|b\|_{\gamma^{\mathrm{II}}} + \varepsilon_0\|b\|_{\gamma^{\mathrm{II}}}\|q\|_{\gamma^{\mathrm{II}}} + \varepsilon_0\|b\|^2_{\gamma^{\mathrm{II}}} +$$
$$+ \varepsilon_0\|t\|_{\gamma^{\mathrm{III}}}\|c\|_{\gamma^{\mathrm{III}}} + \varepsilon_0\|c\|_{\gamma^{\mathrm{III}}}\|t\|_{\gamma^{\mathrm{III}}} + \varepsilon_0\|c\|^2_{\gamma^{\mathrm{III}}} +$$
$$+ \varepsilon_0\|r\|_{\gamma^{\mathrm{I}}}\|a\|_{\gamma^{\mathrm{I}}} + \varepsilon_0\|a\|_{\gamma^{\mathrm{I}}}\|r\|_{\gamma^{\mathrm{I}}} + \varepsilon_0\|a\|^2_{\gamma^{\mathrm{I}}}\Big).$$

Здесь обозначение $\|D\|\gamma$ является нормой $\|D\|_\gamma = \sum|d_n|^2|\gamma|$. Записанное неравенство имеет структуру $\sum l_i d_i^2 \leqslant 2\sum l_i(2g_i d_i + g_i^2)$, $d_i \geqslant 0$, поэтому существует такая константа C, что выполняется неравенство $\sum d_i^2 \leqslant C\sum g_i^2$. Таким образом, $\|q\|^2_{\gamma^{\mathrm{II}}} + \|t\|^2_{\gamma^{\mathrm{III}}} + \|r\|^2_{\gamma^{\mathrm{I}}} \leqslant C\left(\|b\|^2_{\gamma^{\mathrm{II}}} + \|c\|^2_{\gamma^{\mathrm{III}}} + \|a\|^2_{\gamma^{\mathrm{I}}}\right)$.

Аналогично может быть установлена оценка для решений последовательности приближенных задач для уравнения $A_n x = B_n y$.

Доказательство существования и непрерывности обратного оператора A^{-1} в f_1 проведем так же, как в работе [10].

Теорема 2. *Пусть* X, Y — *банаховы пространства,* $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$, *вложение компактно и плотно, причем пространства имеют следующую структуру.*

1. $\exists\{\mathrm{X}_n\}_{n=1,\ldots,\infty}$ *и* $\{Y_n\}_{n=1,\ldots,\infty}$ — *семейства конечномерных унитарных пространств, совпадающих поэлементно для всех n и* $\forall x_n \in \mathrm{X}_n$ $\exists C = \mathrm{const}\colon \|x_n\|_{\mathrm{X}_n} \geqslant C\|x_n\|_{\mathrm{Y}_n}$.

2. Заданы связывающие отображения $\{\Psi_n\}_{n=1,\ldots,\infty}$, $\Psi_n \in L(\mathrm{X}_n, \mathrm{X})$; $\Psi_n \in L(\mathrm{Y}_n, \mathrm{Y})$, *удовлетворяющие требованиям, накладываемым на связывающие отображения в определении компактной аппроксимации.*

3. Задано семейство отображений $\{\mathrm{P}_n\}_{n=1,\ldots,\infty}$, $\mathrm{P}_n \in L(\mathrm{X}, \mathrm{X}_n)$; $\mathrm{P}_n \in L(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}_n)$, *удовлетворяющих условиям* $\forall x \in \mathrm{X}_n$, $\mathrm{P}_n\Psi_n x = x$;

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \|\Psi_n\mathrm{P}_n x - x\|_{\mathrm{X}} \to 0, \quad n \to 0;$$
$$\forall y \in \mathrm{Y}, \quad \|\Psi_n\mathrm{P}_n y - y\|_{\mathrm{Y}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

4. Определен оператор $A \in L(\mathrm{X}, \mathrm{X})$, $A \in L(\mathrm{Y}, \mathrm{Y})$ *и существует последовательность операторов* $\{A_n\}$, $A_n \in L(\mathrm{X}_n, \mathrm{X}_n)$, $A_n \in L(\mathrm{Y}_n, \mathrm{Y}_n)$, *компактно аппроксимирующая оператор A по отношению к связывающим отображениям* $\{\Psi_n\}$ *в* X *и в* Y.

5. Число $\lambda_0 \in \rho(A)$ *в* Y, *тогда* $\lambda_0 \in \rho(A)$ *в* X.

Построим некоторую шкалу гильбертовых пространств $\mathrm{H}_\theta = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]_\theta = D(\Lambda^\theta)$, где X, Y — гильбертовы пространства, причем X вложено в Y, вложение компактно и плотно. Оператор $\Lambda = S^{1/2}$, где оператор S определим по формуле $(u, v)_{\mathrm{X}} = (Su, v)_{\mathrm{Y}}$, а через $D(S)$ обозначим совокупность всех таких u, для которых функционал $f(v) = (u, v)_{\mathrm{X}}$ непрерывен на X относительно метрики Y. Определим норму как $\|u\|_{[\mathrm{X},\mathrm{Y}]_\theta} = \left(\|u\|^2_{\mathrm{Y}} + \|\Lambda^\theta u\|^2_{\mathrm{Y}}\right)^{1/2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Аналогично теореме 2 рассмотрим пространства $\mathrm{H}_{\theta_2}, \mathrm{H}_{\theta_1}$ для любых θ_1, θ_2: $\theta_1 < \theta_2$; H_{θ_2} плотно и компактно вкладывается в H_{θ_1}. Определим H_{θ_n} как линейную оболочку конечного числа n функций φ_n оператора Λ; $\mathrm{P}_n \in L(\mathrm{H}_\theta, \mathrm{H}_{\theta_n})$ — как ортогональные проекторы; $\Psi_n \in L(\mathrm{H}_{\theta_n}, \mathrm{H}_\theta)$ — как тождественные отображения. Для любого непрерывного оператора $A \in L(\mathrm{H}_\theta, \mathrm{H}_\theta)$ операторы $A_n \in L(\mathrm{H}_{\theta_n}, \mathrm{H}_{\theta_n})$ определим как сужения A на H_{θ_n}. Последовательность $\{A_n\}$ компактно аппроксимирует оператор A по отношению к $\{\Psi_n\}$ для любого θ.

Назовем множеством непрерывности оператора A множество всех θ, при которых оператор A непрерывен. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $A \in L(\mathrm{H}_\theta, \mathrm{H}_\theta)$ *при* $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ — *отрезок непрерывности, а также существует* $\theta = \theta_0 \in (\theta_1, \theta_2)$, *при котором установлена оценка решений последовательности задач с компактно аппроксимирующими оператор* A *конечномерными операторами* $A_n \equiv \mathrm{P}_n A \mathrm{P}_n$, *т. е. существует функционал* f: $f(0) = 0$; $\mathrm{H}_{\theta_1} \to R^1$ *такой, что*

$$\forall x, y \in \mathrm{H}_{\theta_1}, \quad A_n x = \mathrm{P}_n y \Rightarrow \forall n \quad \|\mathrm{P}_n x\|_{\mathrm{H}_{\theta_0}} \leqslant f(y).$$

Тогда на отрезке непрерывности $[\theta_1, \theta_2]$ *существует непрерывный обратный оператор.*

Доказательство. При указанных условиях для любого $y \in \mathrm{H}_{\theta_1}$ существует последовательность $\{x_n\}$: $x_n = A_n^{-1} \mathrm{P}_n y$, причем $\|x_n\|_{\mathrm{H}_{\theta_0}} < C = \mathrm{const}$. Известно, что из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$: $\{x_{n_k}\} \to x$ в H_{θ_1}, $x \in \mathrm{H}_{\theta_1}$. Переходя к пределу в уравнении $A_{n_k} x_{n_k} = \mathrm{P}_{n_k} y$, получаем $Ax = y$. Отсюда по теореме Банаха об обратном операторе следует непрерывность A^{-1} в H_{θ_1}.

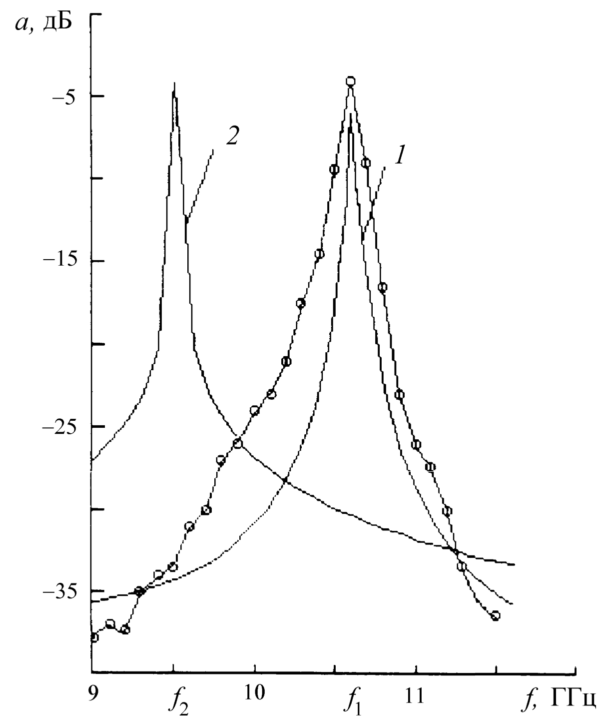

Рис. 2. Зависимость коэффициента передачи $a = 10 \times \lg\left(1 - |R|^2\right)^{-1}$ от частоты f при $d = 1.21$ см, $a - b = 1.06$ см и различном диэлектрическом заполнении: $\varepsilon^{\mathrm{II}} = \varepsilon^{\mathrm{III}} = 2.25 + i0.0003$, $f_1 = 10.6$ ГГц (кривая *1*) и $\varepsilon^{\mathrm{II}} = \varepsilon^{\mathrm{III}} = 9.4 + i0.005$, $f_2 = 9.52$ ГГц (кривая *2*). Кружками обозначены данные эксперимента, сплошные линии — результаты счета, полученные методом проекционного сшивания

Из [10] известно, что если множества непрерывности A и A^{-1} имеют непустое пересечение, то эти множества совпадают и односвязны.

Таким образом, получаем непрерывность обратного оператора на всем отрезке $[\theta_1, \theta_2]$.

Далее, используя утверждение 1, результаты теоремы 3, а также оценку для решений последовательности приближенных задач, можно заключить, что A имеет непрерывный обратный оператор в f_1.

5. Некоторые результаты счета

С помощью указанного алгоритма проведено моделирование [11] двухканального волноводно-диэлектрического резонатора (подобного приведенному на рис. 1 при $c = 0$, $r = p = h = a$ и конечном диэлектрическом заполнении). Полученные численные результаты хорошо соответствуют данным физического эксперимента (рис. 2). На рис. 2 показано также смещение резонансной частоты при изменении диэлектрического заполнения в волноводах.

Литература

1. *Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Рудь Л.А.* Резонансное рассеяние волн. Волноводные неоднородности. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1986.
2. *Гвоздев В.И., Кузаев Г.А., Нефедов Е.И., Яшин А.А.* // УФН. 1992. **162**, №3. С. 127.
3. *Винник А.А.* // Изв. вузов, сер. матем. 1977. №7. С. 38.
4. *Ладыженская О.А, Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
5. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* // Успехи матем. наук. 1983. **38**, №2. С. 3.
6. *Свешников А.Г.* // ДАН СССР. 1950. **73**, №5. С. 917.
7. *Ильинский А.С.* // ЖВМ и МФ. 1973. **13**, №1. С. 119.
8. *Ильинский А.С., Фоменко Е.Ю.* // ЖВМ и МФ. 1991. **31**, №3. С. 339.
9. *Абгалдаев С.И., Моденов В.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1995. №2. С. 27 (Moscow University Phys. Bull. 1995. No. 2. P. 25).
10. *Асланиди К.Г., Моденов В.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. матем. и киберн. 1993. №4. С. 24.
11. *Крюкова Ю.Ю., Моденов В.П.* // ЖВМ и МФ. 2001. **41**, №9. С. 1422.

Поступила в редакцию
10.12.01