ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 538.4

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУЕ

О. Ю. Смирнова, Д. Д. Соколов

(*кафедра математики*)

E-mail: oksyus@mail.ru

Рассматривается генерация магнитного поля во вращающейся полуограниченной струе, так называемое винтовое динамо. Получены условия экспоненциального роста поля по координате и экспоненциального роста поля по времени в фиксированной точке.

1. Спектр задачи винтового динамо

Потоки проводящей жидкости могут экспоненциально усиливать первоначально слабое магнитное поле до величины, при которой оно уже существенно влияет на характер течения. Считается, что этот процесс, называемый гидромагнитным динамо, приводит к образованию магнитных полей в большинстве небесных тел, например на Солнце [1]. Простейшим примером динамо является усиление магнитного поля во вращающейся струе, так называемое винтовое динамо, впервые рассмотренное Ю.Б. Пономаренко (см. работу [2] и приведенные там ссылки). Винтовое динамо является основой для работ по реализации процесса генерации магнитного поля в экспериментальных условиях (см., напр., [3]) и, возможно, действует в джетах звездных и галактических систем [4, 5]. Для бесконечной струи хорошо изучено строение наиболее неустойчивой собственной моды задачи динамо и ее спектра [6], а также решение задачи с начальными условиями [7]. Выяснилось [7], что в зависимости от профиля угловой и продольных скоростей в струе винтовое динамо может приводить к абсолютной и конвективной неустойчивости. В первом случае растущее магнитное поле остается в теле струи, а во втором выносится из струи вместе с жидкостью. Понятия абсолютной и конвективной неустойчивости вводятся для любой однородной бесконечной (хотя бы в одном направлении) системы (см. [8]), при этом несущественна конкретная природа среды и вид первоначального возмущения.

До сих пор, однако, остается неизученным поведение магнитного поля в полубесконечной струе, в начале которой в жидкость вносится заданное магнитное поле. Хотя эта постановка вопроса и представляет определенный интерес для лабораторного эксперимента (например, в рижском эксперименте [9]), но она наиболее актуальна для астрофизических джетов, в которых магнитные поля проникают в среду, по-видимому, в области формирования джета. Особый интерес в задаче о полубесконечной струе представляет различие между конвективной и абсолютной неустойчивостью в рассматриваемом контексте. В самом деле, расстояние от начала струи до точки наблюдения прямо связано со временем, которое жидкость проводит в струе. Поэтому можно ожидать, что в случае конвективной неустойчивости магнитное поле в точке, расположенной на расстоянии z от начала струи, достигает определенного предельного значения, экспоненциально растущего по мере роста z, а в случае абсолютной неустойчивости экспоненциально растет со временем. В настоящей работе мы подтвердим эту гипотезу, решив задачу винтового динамо в полубесконечной струе.

Будем рассматривать кинематическую задачу (в заданном потоке жидкости исследуется поведение магнитного поля, а влияние поля на поток отсутствует), так что ограничением для роста магнитного поля является условие малости средней магнитной энергии по сравнению с кинетической ($\frac{H^2}{8\pi} \ll \frac{\rho}{2}v^2$), т.е. магнитное поле растет до тех пор, пока не достигнет равнораспределения.

Перенос магнитного поля винтовым потоком описывается уравнением индукции (которое получается из уравнений Максвелла) в цилиндрической системе координат r, φ, z. Направим ось z вдоль оси симметрии рассматриваемого винтового потока $v = (0, r\omega(r), v_z(r))$. Тогда в уравнении индукции, записанном для компонент магнитного поля H_r, H_φ, H_z, отделяются уравнения для радиальной H_r и азимутальной H_φ компонент (см. работу [6])

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H_r}{\partial t} + \omega\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial H_r}{\partial z} - \\ &- R_m^{-1}\left(\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)H_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi}\right) = 0,\end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} + \omega\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} - r\omega' H_r - \\ &- R_m^{-1}\left(\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)H_\varphi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi}\right) = 0,\end{aligned} \qquad (2)$$

где штрих означает производную по r, t — время, а $R_m = v_* r_*/\nu_m$ — магнитное число Рейнольдса (ν_m — магнитная диффузия, v_* — характеристическое значение скорости, r_* — характеристический масштаб магнитного поля). Уравнение индукции записано в безразмерных величинах с использованием характеристического значения скорости v_* и единицы времени r_*/v_*. Компоненту H_z можно найти из решения уравнений (1), (2) с помощью условия соленоидальности. Рассмотрим бесконечную струю, в которую вносится магнитное поле в плоскости $z=0$:

$$H_k(r,\varphi,z=0,t)=h_k(r,\varphi,t),$$

а начальные условия будем считать нулевыми. Поле при $z\to+\infty$ положим равным нулю. Решение краевой задачи, учитывая граничные и начальные условия, можно представить в виде (см. [10])

$$H_i(r,\varphi,z,t)=\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^t g_{ij}(r,\varphi,z,t,\widetilde{r},\widetilde{\varphi},\widetilde{z}=0,\tau)\times \times H_j(\widetilde{r},\widetilde{\varphi},\widetilde{z}=0,\tau)d\widetilde{\varphi}d\widetilde{r}d\tau, \tag{3}$$

где $g_{ij}(r,\varphi,z,t,\widetilde{r},\widetilde{\varphi},\widetilde{z},\tau)$ — матрица Грина уравнения индукции. Решение описывает поведение поля в струе для $z>0$, а при $z<0$ поле равно нулю (мы пренебрегаем незначительной диффузией поля против потока).

Для матрицы Грина выполняется уравнение

$$\hat{L}_{pi}g_{ij}(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}},t,\tau)=\delta_{pj}\delta(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}})\delta(t-\tau), \tag{4}$$
$$g_{ij}(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}},t=\tau,\tau)=0,$$

где $\hat{L}_{pi}$ — оператор системы (1), (2), действующий по переменным $\mathbf{x}$ и t, $\mathbf{x}$ обозначает три пространственные переменные (r,φ,z), а $\tilde{\mathbf{x}}=(\widetilde{r},\widetilde{\varphi},\widetilde{z})$. После подстановки поля H_i в виде (3) в систему (1), (2), используя уравнение для матрицы Грина (4), можно убедиться в том, что оно является решением нашей краевой задачи.

Матрицу Грина получаем разложением δ-функции, стоящей в правой части уравнения (4), в ряд по собственным функциям в начальный момент времени. Для осесимметричного поля скорости, которое не зависит от t и z, нормальные моды уравнения индукции имеют вид

$$(H_r,H_\varphi)^T=(h_r^{nm}(r,k),h_\varphi^{nm}(r,k))^T\exp[\gamma t+im\varphi+ikz],$$

где γ ($\mathrm{Re}\,\gamma$ — степень роста, $\mathrm{Im}\,\gamma$ — частота осцилляции) — функция k. Так как мы рассматриваем полубесконечную струю, то спектр решения непрерывен, поэтому появляется интеграл по волновому числу k:

$$\begin{pmatrix}\delta(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}})\\ 0\end{pmatrix}=\sum_{n,m}\int_0^\infty C_{nm}(k,\widetilde{r},\widetilde{\varphi},\widetilde{z},\tau)\times \times\begin{pmatrix}h_r^{nm}(r,k)\\ h_\varphi^{nm}(r,k)\end{pmatrix}\mathrm{e}^{im\varphi+ikz}\,dk, \tag{5}$$

$$\delta(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}})=\delta(r,\tilde{r})\delta(\varphi-\tilde{\varphi})\delta(z-\tilde{z}),$$

$$C_{nm}=\frac{1}{\|H\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}(h_r^{nm}(r',k))^*\delta(r',\widetilde{r})dr'\times \times\iint\mathrm{e}^{-im\varphi'-ikz'}\,\delta(\varphi'-\widetilde{\varphi})\delta(z'-\widetilde{z})\,d\varphi'dz',$$

где $\|H\|^2$ — норма собственного вектора. Записан коэффициент для одного столбца матрицы, для другого аналогично раскладываем в ряд $\begin{pmatrix}0 & \delta(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}})\end{pmatrix}^T$. Каждый столбец матрицы Грина записываем в виде разложения по нормальным модам с коэффициентом, полученным из разложения (5), тогда матрица Грина имеет вид

$$g_{ij}(r,\varphi,z,t,\widetilde{r},\widetilde{\varphi},\widetilde{z},\tau)=\sum_{nm}\int_0^\infty\begin{pmatrix}g^{(1)} & g^{(2)}\end{pmatrix}\times \times\exp[\gamma(r_0)(t-\tau)+im(\varphi-\tilde{\varphi})+ik(r_0)(z-\tilde{z})]\,dk, \tag{6}$$

где столбцы $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ являются функциями r, r_0 и k, их конкретный вид для нас неважен, так как для дальнейшего исследования решения имеет значение только экспоненциальная часть матрицы Грина.

Для построения решения мы используем основные свойства асимптотических собственных функций винтового динамо (см. [6]). Эти функции сосредоточены внутри цилиндрических поверхностей определенного радиуса r_0. Радиус r_0 для мод с данным числом k находится из уравнения

$$k=-\frac{m\omega'(r_0)}{v_z'(r_0)}, \tag{7}$$

где производная берется по r. С другой стороны, r_0 можно считать независимой переменной и из этого уравнения определять k для соответствующих мод, т. е. непрерывный спектр собственных решений параметризован радиусом r_0. Рассматривается волновой пакет, распространяющийся вдоль оси z, который состоит из большого числа мод с различными значениями k, сосредоточенных на разных радиусах r_0, поэтому вместо интеграла по k в (6) появляется интеграл по r_0. Для данного волнового числа m величина $\mathrm{Im}\,\gamma$ находится из соотношения

$$\mathrm{Im}\,\gamma=-m\omega(r_0)-kv_z(r_0). \tag{8}$$

В работе [6] получены оценки для степени роста $\mathrm{Re}\,\gamma\sim R_m^{-1/2}$ и частоты осцилляции $\mathrm{Im}\,\gamma\sim R_m^0$, поэтому

$$\mathrm{Im}\,\gamma(r_0)\gg\mathrm{Re}\,\gamma(r_0). \tag{9}$$

2. Асимптотическое поведение решения

Подставим матрицу Грина в (3) и поменяем порядок интегрирования. Будем считать, что граничное условие не изменяется со временем (это существенно для оценки интеграла методом стационарной фазы [11]), интеграл по k заменим интегралом по r_0. Тогда получается решение следующего вида:

$$H_i(r,\varphi,z,t) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^t F_i(r,\varphi,r_0) \times \tag{10}$$

$$\times \exp[ik(r_0)z]\exp[(\operatorname{Re}\gamma(r_0) + i\operatorname{Im}\gamma(r_0))(t-\tau)]dr_0 d\tau.$$

После вычисления интеграла по времени в решении (10) интеграл по r_0 можно оценить с помощью метода стационарной фазы в соответствии с оценкой (9). Для $t \gg 1$ интеграл вида (см. [10]) $I = \int\limits_0^\infty F(x)\exp(i\psi(x)t)dx$ оценивается как

$$I \simeq (2\pi\left|\psi''(x_0)\right|)^{-1/2} F(x_0)\exp(i\psi(x_0)t),$$

где точка x_0 определяется из уравнения $\psi'(x_0) = 0$.

На границе $z = 0$ вносится магнитное поле (магнитный пакет), которое переносится потоком жидкости и усиливается, поэтому максимальная степень роста магнитного поля соответствует магнитному пакету. Наиболее интересно изучить два случая: изменение поля в магнитном пакете и изменение поля в среде после прохождения пакета. В первом случае решение (10) рассматриваем в подвижной системе координат $z = z_0 + Vt$, т. е. интегрируем (10) по времени, положив $t = z/V$, а потом оцениваем оставшийся интеграл по r_0 для $z \gg 1$ и получаем экспоненциальный рост поля по координате (конвективная неустойчивость). Во втором случае, интегрируя (10) по времени в неподвижной системе координат и оценивая интеграл по r_0 для времени $t \gg 1$, получим экспоненциальный рост поля по времени в каждой фиксированной точке (абсолютная неустойчивость). Дальше мы выпишем условия, при которых будет иметь место абсолютная и конвективная неустойчивость.

Абсолютная неустойчивость. В этом случае условие стационарности фазы имеет вид

$$\frac{d}{dr_0}\left[\operatorname{Im}\gamma(r_0)\right]\bigg|_{r_0=r_j} = 0. \tag{11}$$

Для фиксированной точки z степень роста $\operatorname{Re}\gamma(r_j)$ не совпадает с максимально возможной, соответствующей магнитному пакету. Если $\operatorname{Re}\gamma(r_j) > 0$, то магнитное поле экспоненциально растет по времени (т. е. проходящее магнитное возмущение оставляет за собой намагниченную среду). Поле будет расти до тех пор, пока не достигнет равнораспределения.

Конвективная неустойчивость. В этом случае условие стационарности фазы имеет вид

$$\frac{d}{dr_0}\left[\operatorname{Im}\gamma(r_0)\frac{z}{V} + k(r_0)z\right] = 0. \tag{12}$$

Используя уравнения (7) и (8), получим соотношение $\frac{d}{dr_0}[\operatorname{Im}\gamma(r_0)] = -k'v$, тогда условие (12) приводится к виду

$$(v(r_b) - V)\frac{dk}{dr_0}\bigg|_{r_0=r_b} = 0. \tag{13}$$

Условие (13) выполняется для двух различных мод. Для мод с экстремальным значением $k'(r_0) = 0$ выполняется условие стационарности фазы в неподвижной точке; из этого следует, что поле растет также в подвижной точке. Таким образом, условие (11) является частным случаем условия (13). Для мод с условием $v(r_b) = V$ следует, что магнитное поле вморожено в поток (распространяется с такой же скоростью). Из решения (10) и уравнения (12) следует, что поле растет по координате, пока не достигнет предельного значения, которое обусловлено тем, что джет имеет конечную длину (которую можно оценить как $L \simeq R_m^{1/2} r^*$, где значение числа Рейнольдса для астрофизических джетов $R_m \sim 10^6 - 10^8$ (см. [7]), поэтому асимптотические оценки получены для расстояния $z \ll L$), либо тем, что магнитное поле достигло равнораспределения (потеряла смысл задача кинематического динамо).

3. Обсуждение результатов

В работе рассмотрена граничная задача для винтового динамо и исследовано асимптотическое поведение решения для времени $t \gg r_*/v_*$ и расстояния $z \gg r_*$. Асимптотические решения соответствуют двум различным реализациям магнитного поля в джете — случаю абсолютной и конвективной неустойчивости. Абсолютная неустойчивость соответствует росту поля в фиксированной точке джета. Магнитный пакет, проходя по джету, оставляет намагниченную среду. Это происходит в том случае, если степень роста собственной функции положительна, при условии, что существует точка, где $\frac{d}{dr_0}[\operatorname{Im}\gamma(r_0)] = 0$. Поле растет по времени в каждой фиксированной точке, а поскольку задача кинематическая, то рост поля будет ограничен нелинейностью. Конвективная неустойчивость описывает распространение по джету магнитного пакета, который движется со скоростью, равной скорости потока на радиусе, где локализована собственная функция с максимальной степенью роста. Магнитное поле пакета экспоненциально растет по координате, ограничением на рост является длина джета или достижение равнораспределения. Можно надеяться, что экспоненциальный рост величины магнитного поля вдоль джета удастся зарегистрировать в наблюдениях подходящих внегалактических и галактических джетов в звездных системах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 01-02-16158, 00-02-17854) и Молодежного гранта РАН.

Литература

1. *Паркер Е.* Космические магнитные поля. М.: Мир, 1982.
2. *Пономаренко Ю.Б.* // Журн. прикл. мех. и техн. физики. 1973. **6**. С. 47.
3. *Соколов Д.Д.* // Соросовский образовательный журнал. 2001. **7**, № 4. С. 111.
4. *Shukurov A., Sokoloff D.* // Stellar Jets and Bipolar Outflows / Ed. L. Errico and A. Vittone. Dordrecht: Kluwer, 1993. P. 395.
5. *Shukurov A.M., Sokoloff D.D.* // Int. Astron. Union. 1993. **157**. P. 367.
6. *Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D., Shukurov A.M.* // J. Fluid Mech. 1988. **197**. P. 39.
7. *Reshetnyak M.Yu., Sokoloff D.D., Shukurov A.M.* // Astron. Nachr. 1991. **312**. P. 33.
8. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. С. 324.
9. *Gailitis A., Lielausis O., Dement'ev S.* et al. // Phis. Rev. Lett. 2000. **84**. P. 4365.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
11. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию
01.02.02

УДК 539.12.01

ИОНИЗАЦИЯ СИЛЬНЫМ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ ПРИ УЧЕТЕ ДЕЙСТВИЯ КВАНТУЮЩЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. Н. Родионов*), Г. А. Кравцова, А. М. Мандель*)

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: th180@phys.msu.su

На основе точно решаемой $3D$ модели короткодействующего потенциала и временной функции Грина в интенсивном электромагнитном поле, представляющем собой комбинацию постоянного магнитного поля и поля циркулярно поляризованной волны, получено трансцендентное уравнение для комплексной энергии. Рассчитаны параметры квазистационарных состояний электрона, находящегося в δ-потенциале, с учетом действия внешнего интенсивного поля сложной конфигурации. Выяснен вопрос о возможности стабилизации распада связанных состояний спинорной и скалярной частиц посредством интенсивного магнитного поля. Отмечено, что полученные результаты требуют пересмотра утвердившегося представления о стабилизирующей роли сильного магнитного поля при ионизации атомов.

Изучение ионизации атомов и ионов, а также процессов фотопоглощения кристаллов в интенсивных электромагнитных полях было начато более 35 лет назад [1–6]. Однако до сих пор еще отсутствует полная ясность в ряде вопросов, имеющих существенное значение как для атомной физики, так и для физики твердого тела. В частности, это относится к исследованию нелинейных явлений в области действия сильных полей сложных конфигураций [7–12]. Отличительной чертой развиваемых подходов является рассмотрение точно решаемых моделей и проведение анализа получаемых результатов в аналитическом виде для случая электромагнитных полей произвольной интенсивности.

Среди указанных работ можно выделить публикации, в которых изучалась возможность убывания скорости распада атомов с ростом интенсивности лазерного поля [9, 10] (так называемый *режим стабилизации*). Аналогичный вопрос об уменьшении ширины квазиэнергетического уровня под действием магнитного поля решался в работе [7]. Однако независимо от типа изучаемых конфигураций электромагнитных полей в работах [7, 9, 10] рассмотрен лишь случай *скалярных* заряженных частиц. Такое ограничение не позволило исследовать интересные поляризационные закономерности, возникающие в сильных электромагнитных полях. Изучению этого вопроса и посвящена настоящая статья.

Цель работы — на примере точно решаемой $3D$ модели короткодействующего потенциала получить аналитические выражения, описывающие воздействие на состояния слабосвязанного электрона интенсивного электромагнитного поля, которое представляет собой комбинацию постоянного магнитного поля и поля циркулярно поляризованной волны. В частности, выясняется вопрос о стабилизации распада связанного состояния электрона посредством воздействия интенсивного магнитного поля.

Основой развиваемого подхода служат известные точные решения квантовых уравнений для заряженных частиц, движущихся в электромагнитном поле описанной выше конфигурации, при распространении волны вдоль направления магнитного поля [13].

*) Кафедра общей физики Московского государственного геологоразведочного университета.