(рис. 3, *б*). Расчет показывает, что для этого диэлектрика $\alpha_c \approx 10^{20}$ м^3/с, поэтому $\alpha > 10^{20}$ м^3/с.

Заключение

В работе предложен алгоритм, который позволяет находить все характеристики, связанные с зарядом, растекающимся в объеме диэлектрика для любого момента времени: плотность распределения носителей обоих знаков, ток утечки, величину создаваемого электрического поля как внутри слоя, так и в окружающем пространстве. Метод расчета универсален; он не накладывает никаких ограничений ни на значения феноменологических коэффициентов, ни на количество и свойства релаксационных механизмов, которые могут быть включены в модель в случае необходимости. Таким механизмом может являться, например, термоэлектретный эффект, на важность роли которого в процессах электропереноса в органических диэлектриках обращают внимание некоторые авторы [18, 19].

Разработана методика, которая на основании сравнения результатов расчета по модели с экспериментальными данными позволяет находить значения некоторых феноменологических параметров модели. Тем самым преодолевается главное возражение, которое обычно выдвигается против феноменологических моделей проводимости диэлектрических сред, что некоторые коэффициенты, входящие в модель, не подлежат непосредственному экспериментальному измерению. На основании разработанной методики в качестве иллюстрации работы алгоритма рассчитаны некоторые параметры резиста SAL-601.

Литература

1. *Боев С.Г., Ушаков В.Я.* Радиационное накопление заряда в твердых диэлектриках. М., 1991.
2. *Тютнев А.П., Саенко В.С., Мингалеев Г.С.* и др. // Хим. выс. эн. 1984. **18**, №3. С. 219.
3. *Mingaleev G.S., Tyutnev A.P., Gerasimov G.P.* et al. // Phys. Stat. Sol. 1986. **93**, No. 1. P. 251.
4. *Боев С.Г., Сигаев Г.И.* // Изв. вузов. Физика. 1980. **23**, №11. С. 65.
5. *Боев С.Г.* // Изв. вузов. Физика. 1985. **28**, №7. С. 107.
6. *Борисова М.Э., Койков С.Н., Морозов С.Ф.* // Изв. вузов. Физика. 1974. **17**, №6. С. 104.
7. *Архипов В.И., Руденко А.И., Андриеш А.М.* и др. Нестационарные инжекционные токи в неупорядоченных твердых телах. Кишинев, 1983.
8. *Тютнев А.П., Ванников А.В., Мингалеев Г.С.* Радиационная электрофизика органических диэлектриков. М., 1989.
9. *Орешкин П.Т.* Физика полупроводников и диэлектриков. М., 1977.
10. *Бойцов В.Г., Рычков А.А.* // ЖТФ. 1985. **55**, №5. С. 881.
11. *Ванников А.В., Матвеев В.К., Сичкарь В.П., Тютнев А.П.* Радиационные эффекты в полимерах. М., 1982.
12. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы, М., 1989.
13. *Ingino J., Owen G., Berglund C.* et al. // J. Vac. Sci. Technol. B. 1994. **12**, No. 3. P. 1367.
14. *Liu W., Ingino J., Pease R.* // J. Vac. Sci. Technol. B. 1995. **13**, No. 5. P. 1979.
15. *Bai M., Picard D., Tanasa C.* et al. // Proc. SPIE. 1998. **3546**, No. 12. P. 383.
16. *Bai M., Pease R., Tanasa C.* et al. // J. Vac. Sci. Technol. B. 1999. **17**, No. 6. P. 2893.
17. *Борисов С.С., Грачев Е.А., Устинин Д.М.* и др. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2002. №3. С. 32 (Moscow University Phys. Bull. 2002. No. 3. P. 48).
18. *Борисова М.Э., Галюков О.В., Койков С.Н.* // Изв. вузов. Физика. 1994. **37**, №4. С. 15.
19. *Сергеева А.Е., Федосов С.Н., Миракьян А.М.* и др. // ФТТ. 1996. **38**, №9. С. 2887.

Поступила в редакцию
10.06.02

УДК 530.145:517.98

САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ОПЕРАТОРА ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ БЕЗМАССОВОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Х. Афантитис, С. В. Каляшин

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Показано, что в определенном в работе функциональном пространстве радиальный оператор движения скалярного безмассового поля самосопряжен с нулевым дефектом и дважды вырожденным непрерывным спектром во внешней и внутренней областях пространства Шварцшильда.

Введение

В данной работе исследуется безмассовое скалярное поле в пространстве Шварцшильда. Обычно при рассмотрении этой квантовой задачи учитывается классическое решение для черной дыры, т. е. на сферической поверхности радиуса Шварцшильда $r = 2M$ нет исходящих полей и решение выражается волновой функцией с асимптотикой

$$R(r^*) = \begin{cases} A\, e^{-i\omega r^*}, & r \to 2M \quad (r^* \to -\infty), \\ e^{-i\omega r^*} + B\, e^{i\omega r^*}, & r \to \infty \quad (r^* \to \infty), \end{cases}$$

где обозначена «черепашья» координата $r^* = r + 2M \ln|1 - r/2M|$. В работе [1] утверждается, что получаемый гамильтониан самосопряжен везде, кроме начала координат, где он пропорционален дельта-функции.

Мы рассмотрим возможность построения эрмитова гамильтониана путем соответствующего выбора (а не задания априори) граничных условий.

Обозначения. Общие положения

Чтобы упростить записи, вместо обычной радиальной переменной r и времени τ определим координаты, отличающиеся масштабом. Пусть $x = r/2M$, $t = \tau/2M$, лангранжиан и метрический тензор равны соответственно

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\varphi\, \partial_\nu\varphi;$$

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left\{\frac{x-1}{x}; \frac{-x}{x-1}; -x^2; -x^2\sin^2\theta\right\},$$

где g — определитель матрицы $g_{\mu\nu}$. В уравнении движения, следующем из уравнения Лагранжа, переменные разделяются, и волновую функцию φ можно представить в виде

$$\varphi(t, x, \Omega) = \sum_{\substack{0 \leqslant J < \infty \\ -J \leqslant m \leqslant J}} \int d\omega\, e^{i\omega t}\, R(x)\, Y_J^{(m)}(\Omega),$$

где $Y_J^{(m)}$ — сферическая функция, а $R(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_x(x(x-1)\partial_x R(x)) + \left\{x^3(x-1)^{-1}\omega^2 - j^2\right\} R(x) = 0; \quad j^2 = J(J+1). \tag{1}$$

В уравнении (1) точка $x = 1$ является особой. Она делит полную область на «внутреннюю» $(0 < x < 1)$ и «внешнюю» $(1 < x < \infty)$.

Оператор движения

Радиальный дифференциальный оператор движения определяется как

$$K = \frac{1}{\rho(x)}\, T_{(e)} = \frac{1}{\tilde\rho(x)}\, T_{(i)},$$

где во внешней области оператор $T_{(e)}$ и функция $\rho(x)$ равны соответственно

$$T_{(e)}R = -\partial_x(x(x-1)\partial_x R) + j^2 R;$$

$$\rho = x^3(x-1)^{-1} > 0,\ x \in (1, \infty),$$

а во внутренней области оператор $T_{(i)}$ и весовая функция $\tilde\rho(x)$ имеют вид

$$T_{(i)}R = -\partial_x(x(1-x)\partial_x R) - j^2 R;$$

$$\tilde\rho = x^3(1-x)^{-1} > 0,\ x \in (0, 1).$$

С помощью оператора K уравнение (1) записывается как задача на собственные значения, $KR(x) = \omega^2 R(x)$. Покажем, что оператор K самосопряжен с индексом дефекта $(0, 0)$.

Во внешней области удобно использовать «черепашью» координату ξ и новую функцию $u(\xi)$, записанные соответствующими выражениями

$$\xi = x + \ln(x-1), \quad -\infty < \xi < \infty \leftrightarrow 1 < x < \infty;$$

$$R(x) = u(\xi(x))/x.$$

Уравнение (1), принимает вид

$$K_\xi u(\xi) = \{-\partial_\xi^2 + q(x)\} u(\xi) = \omega^2 u(\xi); \quad q(x) = (x-1)x^{-4}(xj^2 + 1). \tag{2}$$

Потенциал $q(x) > 0$ для любых ξ и J и стремится к нулю при $\xi \to \pm\infty$. Поэтому оператор K_ξ является эрмитовым с индексом дефекта $(0, 0)$ и с дважды вырожденным непрерывным спектром в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ [2]. Возвращаясь к координате x, получаем, что оператор K имеет те же свойства, что и K_ξ в пространстве $L^2_{\rho(x)}(1, \infty)$ функций, квадратично интегрируемых с весом $\rho(x)$ на интервале $(1, \infty)$. Этот результат для оператора K можно получить непосредственно рассматривая его в терминах координаты x.

Минимальные и максимальные операторы для $T_{(e)}$ и $T_{(i)}$

Операторы $T_{(e)}$ и $T_{(i)}$ имеют вид

$$TR = -\partial_x(\hat p(x)\, \partial_x R) + kR, \quad k = \mathrm{const},$$

где для внешней области $T = T_{(e)}$, $\hat p = p = x(x-1)$, а для внутренней $T = T_{(i)}$, $\hat p = \tilde p = x(1-x)$. Полагаем $k > 1$ (во внутренней области это достигается добавлением $k_j = j^2 + 2$ для любого j^2).

Для $T_{(e)}$ и $T_{(i)}$ построим два оператора: минимальный $\dot T$ с областью определения $D(\dot T) = C_0^\infty(a, b)$ и максимальный T с $D(T) = H(a, b)$ — множество функций $u(x)$: $u, Tu \in L^2(a, b)$. Интервал (a, b) равен $(1, \infty)$ для $T_{(e)}$ и $(0, 1)$ для $T_{(i)}$. Отметим, что оба оператора действуют в областях с двумя сингулярными концами: во внешней области правый конец простирается до бесконечности, а при $x \to 1$ функция $p^{-1}(x)$ неинтегрируема; во внутренней области функция $\tilde p^{-1}(x)$ неинтегрируема ни на одном конце [3]. Асимптотики функций $u \in H(1, \infty)$, $\tilde u \in H(0, 1)$ равны (при $\alpha, \beta > 0$) соответственно

$$\lim_{x\to 1} u(x) = (x-1)^{1/2+\alpha} \text{ или } \lim_{x\to 1} u(x) = \mathrm{const};$$

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = x^{-1/2-\beta}; \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 1} \tilde u(x) = (1-x)^{1/2+\alpha} \text{ или } \lim_{x\to 1} \tilde u(x) = \mathrm{const};$$

$$\lim_{x\to 0}\tilde{u}(x)=x^{1/2+\beta}. \tag{4}$$

Пространство $C_0^\infty(a,b)$ плотно в $L^2(a,b)$ (а также в множестве $H(a,b)$), и так как $\dot{T}\subset T=\dot{T}^*$, то оператор $\dot{T}$ симметричен. Для любой функции $u\in C_0^\infty(a,b)$ скалярное произведение равно

$$(\dot{T}u,u)=\int_a^b dx\{(-\hat{p}u')'u^*+k|u|^2\}= \\ =\int_a^b dx\{\hat{p}|u'|^2+k|u|^2\}>\|u\|^2. \tag{5}$$

Следовательно, $\forall u\in C_0^\infty(a,b)$, $(\dot{T}u,u)\in\Re$ и числовая область значений $\Theta(\tilde{\dot{T}})$ (множество комплексных чисел $\zeta=(\tilde{\dot{T}}u,u)$, где $\tilde{\dot{T}}$ — замыкание $\dot{T}$) является подмножеством вещественной прямой $\zeta>1$. Дополнение к $\Theta(\tilde{\dot{T}})$: Σ — связное множество, содержащее верхнюю и нижнюю полуплоскости и точку $\zeta=0$. Дефектные числа на верхней и нижней полуплоскостях равны n, а индекс дефекта равен (n,n). Число n — это дефект оператора $\tilde{\dot{T}}-\zeta$, $\zeta\in\Sigma$, т. е. дефект области значений $R(\tilde{\dot{T}}-\zeta)$, в том числе и для точки $\zeta=0$, поскольку она содержится в множестве Σ. Речь идет о дефекте самого оператора $\tilde{\dot{T}}$ и дефекте множества $R(\tilde{\dot{T}})$.

Обозначив через $N(T)$ нуль-пространство оператора T, имеем

$$\dot{T}^*=T\ \Rightarrow\ R(\dot{T})^-=N(\dot{T}^*)=N(T).$$

Поэтому, если индекс дефекта $\tilde{\dot{T}}$ равен $(0,0)$, то оператор самосопряжен; $\dot{T}$ существенно самосопряжен и оператор $\dot{T}^*=T$ самосопряжен [2].

Самосопряженность операторов $T_{(e)}$ и $T_{(i)}$

Поделим интервал $(1,\infty)$ регулярной точкой $c\in(1,\infty)$ и введем в нем регулярные граничные условия. Сужения $\dot{T}_{(e)}$ с дефектным числом n_e на интервалы $(1,c)$ и (c,∞) обозначим $\dot{T}_{(e)}^{(1)}$ и $\dot{T}_{(e)}^{(2)}$ соответственно, а их дефектные числа n_1 и n_2. Для операторов второго порядка имеем [3]

$$n_e=n_1+n_2-2. \tag{6}$$

Рассмотрим операторы $\dot{T}_{(e)}^{(2)}$ и $T_{(e)}^{(2)}$. Поскольку один конец регулярен, а при $x\to\infty$ интеграл $\int_c^\infty dx\,p^{-1/2}(x)$ расходится, то по теореме Левинсона [2, 3] индекс дефекта равен $(1,1)$. Следовательно, $n_2=1$.

Рассмотрим операторы $\dot{T}_{(e)}^{(1)}$ и $T_{(e)}^{(1)}$ на интервале $(1,c)$. Определим n_1. Аналогично выражению (5), $\forall v\in C_0^\infty(1,c)$ имеем $(\dot{T}_{(e)}^{(1)}v,v)>\|v\|^2$. Пусть $u\in L^2(1,c)$ и $T_{(e)}^{(1)}u=0$. Если вещественная функция $w\in C_0^\infty(1,c)$, то $v=uw\in D(\tilde{\dot{T}}_{(e)}^{(1)})$ и можно показать [2], что

$$\|v\|^2=\int_1^c dx\,w^2|u|^2<(\dot{T}_{(e)}^{(1)}v,v)=\int_1^c dx\,x(x-1){w'}^2|u|^2.$$

Функция $w(x,\alpha)$ для любого малого α выбирается со свойствами

$$w=1,\ \ x\in(1+\alpha,c-\alpha);\quad w(1)=w(c)=0;$$

$$\int_1^{1+\alpha} dx\,{w'}^2=1;\quad \int_{c-\alpha}^{c} dx\,{w'}^2=1. \tag{7}$$

Так как $w'(x)=0$ для $x\in(1+\alpha,c-\alpha)$, то

$$\int_{1+\alpha}^{c-\alpha} dx\,|u(x)|^2<\int_1^{1+\alpha} dx\,x(x-1){w'}^2|u(x)|^2+ \\ +\int_{c-\alpha}^{c} dx\,x(x-1){w'}^2|u(x)|^2.$$

Учтем (7) и, применив теорему о среднем, при $\alpha\to 0$ имеем

$$\int_{1+\alpha}^{c-\alpha} dx\,|u(x)|^2\to\|u\|^2< \\ <p(1)|u(1)|^2+p(c)|u(c)|^2=p(c)|u(c)|^2,$$

так как $p(1)=0$. Чтобы получить $\|u\|=0$, необходимо ограничить область определения условием $u(c)=0$. Поэтому размерность нуль-пространства равна единице и $n_1=1$, а из уравнения (6) следует, что $n_e=0$.

Определим нуль-размерность оператора $T_{(i)}$. Пусть функция $u\in H(0,1)$ такая, что $T_{(i)}u=0$. Для вещественной функции $w\in C_0^\infty(0,1)$ имеем $v=uw\in D(\tilde{\dot{T}}_{(i)})$. Как и во внешней области, для интервала $(1,c)$ можно получить следующий результат, только с заменой его на интервал $(0,1)$:

$$\|u\|^2\leqslant\tilde{p}(0)|u(0)|^2+\tilde{p}(1)|u(1)|^2=0,$$

так как $\tilde{p}(0)=\tilde{p}(1)=0$. Поскольку $u\in H_{(i)}\subset L^2(0,1)$, то $u\equiv 0$, поэтому размерность нуль-пространства оператора $T_{(i)}$ равна нулю и $n_i=0$. Таким образом, операторы $T_{(e)}$ и $T_{(i)}$ самосопряжены.

Оператор K

Рассмотрим оператор K в пространстве $L^2_{\rho(x)}(1,\infty)$ функций, квадратично интегрируемых с весом $\rho(x)$. Заметим, что $L^2_{\rho(x)}(1,\infty)\subset L^2(1,\infty)$. Условия $u, Ku\in L^2_{\rho(x)}(1,\infty)$ приводят к асимптотикам

$$\lim_{x\to 1} u(x)=(x-1)^{\alpha},\quad \lim_{x\to\infty} u(x)=x^{-\frac{3}{2}-\beta}\quad (\alpha,\,\beta>0), \tag{8}$$

тогда как функции из $H(1,\infty)$ имеют асимптотики (3). Наложим на $L^2_{\rho(x)}(1,\infty)$ требование, чтобы функции имели свойства (8) при $\alpha>1/2$, и обозначим это пространство $H^{\rho}_{(e)}\subset H(1,\infty)$. Тогда если $T_{(e)}$ плотно определен в $H(1,\infty)$, то он плотно определен в $H^{\rho}_{(e)}$ и симметричен. Оператор A умножения на $\rho(x)$ симметричен в $H^{\rho}_{(e)}$. Поэтому $A^{-1}T_{(e)}=K$ симметричен с весом ρ относительно скалярного произведения $((u,v))$,

$$((u,v))=(Au,v)=\int_1^{\infty} dx\,\rho(x)u^*(x)v(x),$$

$$(u,v)=\int_1^{\infty} dx\,u^*(x)v(x).$$

Этот результат в книге [2] приводится для замыкаемого оператора $T_{(e)}$ и оператора A, ограниченного вместе с обратным оператором A^{-1} относительно скалярного произведения в $L^2(1,\infty)$,

$$\|Au\|^2=\int_1^{\infty} dx\,\rho^2|u(x)|^2<\infty,$$
$$\|A^{-1}u\|^2=\int_1^{\infty} dx\,\rho^{-2}|u(x)|^2<\infty. \tag{9}$$

Для функций $u\in H^{\rho}_{(e)}$ выражение (9) для A^{-1} ограничено. Чтобы (9) было верно и для A, необходимо сузить $L^2_{\rho(x)}$ до пространства $L^2_{\rho^2}$ функций, квадратично интегрируемых с весом ρ^2. Ограниченность A необходима для полноты пространств H и AH относительно скалярного произведения (u,v). Действительно, пусть A ограничен и H полно, т. е. для любой последовательности Коши $\{u_n\}\in H$, $\{u_n\}\to u\in H$. Тогда $\|Au-Au_n\|\leqslant\|A\|\,\|u-u_n\|\to 0$ при $n\to\infty$. Поскольку $\|Au\|\leqslant\|A\|\,\|u\|<\infty$, то $Au\in H$. Однако в условиях данной задачи $A=\rho$ — не самостоятельно действующий оператор, а весовая функция скалярного произведения, относительно которого полнота обеспечивается построением $H^{\rho}_{(e)}$. Заметим, что $H^{\rho}_{(e)}$ полно относительно K: если $u\in H^{\rho}_{(e)}$, то $Ku\in H^{\rho}_{(e)}$.

Во внутренней области оператор K действует в пространстве $L^2_{\tilde\rho(x)}(0,1)$ квадратично интегрируемых функций с весом $\tilde\rho(x)$ на интервале $(0,1)$. Условия $u, Ku\in L^2_{\tilde\rho(x)}(0,1)$ приводят к асимптотике

$$\lim_{x\to 0} u(x)=x^{2+\alpha},\quad \lim_{x\to 1} u(x)=(1-x)^{\beta}\quad (\alpha,\beta>0). \tag{10}$$

Функции из $H(0,1)$ имеют асимптотики (4). Пусть область определения $D(K)=H^{\tilde\rho}_{(i)}$ состоит из функций u: $u, Ku\in L^2_{\tilde\rho(x)}(0,1)$ и верно (10) при $\beta>1/2$. Тогда $H^{\tilde\rho}_{(i)}\subset H_{(i)}$ и, подобно внешней области, $K=\tilde\rho^{-1}T_{(i)}$ симметричен с весом $\tilde\rho$ относительно скалярного произведения

$$((u,v))=(Au,v)=\int_0^1 dx\,\tilde\rho(x)u^*(x)v(x). \tag{11}$$

Считаем также, что достаточно обеспечить замкнутость $H^{\tilde\rho}_{(i)}$ относительно уравнения (11), это условие выполнено самим построением $H^{\tilde\rho}_{(i)}$.

Окончательно получаем результат, что $K = =\rho^{-1}T_{(e)}=\tilde\rho^{-1}T_{(i)}$ самосопряжен с индексом дефекта, равным $(0,0)$ в пространстве $H^{\rho}_{(e)}$ во внешней и в пространстве $H^{\tilde\rho}_{(i)}$ во внутренней областях.

Собственные векторы во внутренней области

Может показаться неожиданным, что K во внутренней области дважды вырожден. Рассмотрим решения во внутренней области. При $\xi\to-\infty$ $(x\to 1)$ уравнение (2) сводится к волновому, $\partial^2_{\xi}u(\xi)+\omega^2u(\xi)=0$. Решения пропорциональны $\sin(\omega\xi)$ и $\cos(\omega\xi)$, и ни одно не может быть отброшено. Рассмотрим предел $\xi\to 0$ $(x\to 0)$. Выпишем разложение для $\xi(x)$ и асимптотическое выражение для уравнения (2):

$$\xi=-\frac{x^2}{2}+O(x^3);$$

$$x^4\,\partial^2_{\xi}u(\xi)+u(\xi)=0\Rightarrow 4\xi^2\,\partial^2_{\xi}u+u=0.$$

Получаем уравнение Эйлера. Подстановка $u=\xi^s$ дает только одно значение $s=\frac{1}{2}$, так что для первого решения имеем $u_1\simeq\xi^{1/2}$. Для определения асимптотики второго независимого решения воспользуемся вронскианом

$$u_1\,u_2'-u_1'\,u_2=C\Rightarrow(u_2/u_1)'=C/(u_1^2).$$

Интегрируя последнее выражение вблизи $\xi=0$, для асимптотики u_2 получим $\xi^{1/2}\ln\xi$. Как u_2, так и $|u_2|^2$ конечны в нуле, то же самое верно для u_1. Поэтому $|u_1|^2$ и $|u_2|^2$ можно рассматривать как плотность вероятности, и обе функции u_1, u_2 могут быть использованы в качестве функции состояния.

Аналогичное рассмотрение в пространстве x дает подобные результаты. При $x\to 0$ уравнение (1) сводится к следующему

$$x(1-x)\,\partial^2_xR(x)+(1-2\,x)\,\partial_xR(x)+j^2\,R(x)=0.$$

Оно является уравнением гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, 1, x)$, где $\alpha\beta = -j^2$, $\alpha + \beta = 1$. Итак, вблизи $x = 0$ $R_1(x) = F(\alpha, \beta, 1, x)$ с асимптотикой $R_1 \to 1$ при $x \to 0$. Вронскиан двух независимых решений равен

$$R_1 R_2' - R_1' R_2 = C(x(1-x))^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (R_2/R_1)' = C(x(1-x)R_1^2)^{-1}.$$

Интегрирование последнего выражения вблизи $x = 0$ дает для R_2 логарифмическую особенность при $x \to 0$. Основная интерпретация вектора состояния связана с плотностью вероятности. Если система во внутренней области находится в состоянии $\Psi(x)$, то плотность вероятности равна $P(x) = \tilde{\rho}(x)\,\Psi^2(x)$. Функция R_2 имеет логарифмическую особенность в нуле, однако величина $P_2(x) = \tilde{\rho}(x)\,R_2^2(x)$ в нуле конечна, и поэтому P_2 можно рассматривать как плотность вероятности, а функция R_2 может быть использована в качестве вектора состояния.

Литература

1. *Sanchez N.* // J. Phys. Rev. 1977. **D16**, No. 4. P. 937.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.

Поступила в редакцию
17.06.02

УДК 523.72:323.43

ГОФРИРОВОЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ МГД ВОЛНЫ

Ф. В. Шугаев, А. П. Калинченко

(*кафедра квантовой статистики и теории поля*)

E-mail: shugaev@phys.msu.ru

Приводится критерий неустойчивости плоской МГД ударной волны.

Существуют два вида неустойчивости разрывов: 1) неустойчивость по отношению к распаду; 2) неустойчивость к изменению формы, или гофрировочная неустойчивость. Гофрировочная неустойчивость ударных волн в классической газодинамике была исследована Дьяковым [1], Конторовичем [2], Иорданским [3]. Для случая ударных волн в магнитной гидродинамике такие работы отсутствуют.

Задача ставится следующим образом: на фронте плоской ударной волны, распространяющейся по однородной покоящейся среде, имеется небольшое возмущение. В начальный момент скорость ударной волны во всех точках фронта постоянна. Кроме того, предполагается, что в начальный момент возмущения распространяются в направлении от фронта волны, а не к нему.

Мы считаем, что ударная волна устойчива, если возмущение убывает со временем, и неустойчива, если возмущение нарастает. В работах [1–3] решается линейная задача. Ниже использованы нелинейные уравнения, однако рассмотрение ограничено лишь малым промежутком времени.

В переменных Эйлера уравнения магнитной гидродинамики записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v_i}{\partial x^j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{1}{4\pi\rho}(\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\times\mathbf{B})_i,\\
&\frac{\partial B_i}{\partial t} = \mathrm{rot}_i(\mathbf{v}\times\mathbf{B}),\\
&\frac{\partial B^i}{\partial x^i} = 0,\\
&\frac{dS}{dt} = 0,\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x^j} = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где v_i — компоненты скорости среды, p — давление, ρ — плотность, S — энтропия, $\mathbf{B}$ — индукция магнитного поля. Считается, что проводимость среды бесконечна.

Система (1) допускает решения в виде волн трех типов: 1) быстрых магнитозвуковых волн; 2) медленных магнитозвуковых волн; 3) альвеновских волн. Скорости их распространения относительно среды равны соответственно

$$U_{1,2} = \sqrt{1/2}\sqrt{c^2 + \frac{B^2}{4\pi\rho} \pm \sqrt{\left(c^2 + \frac{B^2}{4\pi\rho}\right)^2 - c^2\frac{B_n^2}{\pi\rho}}},$$

$$U_3 = \frac{B_n}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

Здесь B_n — нормальная к фронту волны компонента вектора магнитной индукции.

Ниже рассматриваются быстрые ударные волны. Как известно [4], температура и магнитное поле