Оно является уравнением гипергеометрической функции $F(\alpha,\beta,1,x)$, где $\alpha\beta=-j^2$, $\alpha+\beta=1$. Итак, вблизи $x=0$ $R_1(x)=F(\alpha,\beta,1,x)$ с асимптотикой $R_1\to 1$ при $x\to 0$. Вронскиан двух независимых решений равен

$$R_1\,R_2'-R_1'\,R_2=C(x(1-x))^{-1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (R_2/R_1)'=C(x(1-x)R_1^2)^{-1}.$$

Интегрирование последнего выражения вблизи $x=0$ дает для R_2 логарифмическую особенность при $x\to 0$. Основная интерпретация вектора состояния связана с плотностью вероятности. Если система во внутренней области находится в состоянии $\Psi(x)$, то плотность вероятности равна $P(x)=\tilde\rho(x)\,\Psi^2(x)$. Функция R_2 имеет логарифмическую особенность в нуле, однако величина $P_2(x)=\tilde\rho(x)\,R_2^2(x)$ в нуле конечна, и поэтому P_2 можно рассматривать как плотность вероятности, а функция R_2 может быть использована в качестве вектора состояния.

Литература

1. *Sanchez N.* // J. Phys. Rev. 1977. **D16**, No. 4. P. 937.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.

Поступила в редакцию
17.06.02

УДК 523.72:323.43

ГОФРИРОВОЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ МГД ВОЛНЫ

Ф. В. Шугаев, А. П. Калинченко

(*кафедра квантовой статистики и теории поля*)

E-mail: shugaev@phys.msu.ru

Приводится критерий неустойчивости плоской МГД ударной волны.

Существуют два вида неустойчивости разрывов: 1) неустойчивость по отношению к распаду; 2) неустойчивость к изменению формы, или гофрировочная неустойчивость. Гофрировочная неустойчивость ударных волн в классической газодинамике была исследована Дьяковым [1], Конторовичем [2], Иорданским [3]. Для случая ударных волн в магнитной гидродинамике такие работы отсутствуют.

Задача ставится следующим образом: на фронте плоской ударной волны, распространяющейся по однородной покоящейся среде, имеется небольшое возмущение. В начальный момент скорость ударной волны во всех точках фронта постоянна. Кроме того, предполагается, что в начальный момент возмущения распространяются в направлении от фронта волны, а не к нему.

Мы считаем, что ударная волна устойчива, если возмущение убывает со временем, и неустойчива, если возмущение нарастает. В работах [1–3] решается линейная задача. Ниже использованы нелинейные уравнения, однако рассмотрение ограничено лишь малым промежутком времени.

В переменных Эйлера уравнения магнитной гидродинамики записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_i}{\partial t}+v^j\frac{\partial v_i}{\partial x^j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i}+\frac{1}{4\pi\rho}(\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\times\mathbf{B})_i,\\
&\frac{\partial B_i}{\partial t}=\mathrm{rot}_i(\mathbf{v}\times\mathbf{B}),\\
&\frac{\partial B^i}{\partial x^i}=0,\\
&\frac{dS}{dt}=0,\\
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x^j}=0,
\end{aligned}\tag{1}$$

где v_i — компоненты скорости среды, p — давление, ρ — плотность, S — энтропия, $\mathbf{B}$ — индукция магнитного поля. Считается, что проводимость среды бесконечна.

Система (1) допускает решения в виде волн трех типов: 1) быстрых магнитозвуковых волн; 2) медленных магнитозвуковых волн; 3) альвеновских волн. Скорости их распространения относительно среды равны соответственно

$$U_{1,2}=\sqrt{1/2}\sqrt{c^2+\frac{B^2}{4\pi\rho}\pm\sqrt{\left(c^2+\frac{B^2}{4\pi\rho}\right)^2-c^2\frac{B_n^2}{\pi\rho}}},$$

$$U_3=\frac{B_n}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

Здесь B_n — нормальная к фронту волны компонента вектора магнитной индукции.

Ниже рассматриваются быстрые ударные волны. Как известно [4], температура и магнитное поле возрастают при переходе через быстрые ударные волны.

Введем лучи, касательная к которым направлена вдоль внешней нормали n_i к фронту волны. Уравнение луча имеет вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = Gn_i,$$

где G — скорость распространения волны. Положение луча характеризуется криволинейными координатами точки пересечения луча с фронтом волны в начальный момент времени u^α, $\alpha = 1;2$. Таким образом, величины u^α постоянны вдоль луча. В дальнейшем используются лагранжевы переменные u^1, u^2, τ, где τ — момент времени, в который рассматриваемая частица пересекает фронт ударной волны. Таким образом, все величины зависят от u^1, u^2, τ, t.

Граничные условия на ударной волне имеют вид [4]:

$$(\gamma+1)\varepsilon^3 - \left((\gamma-1) + \frac{2}{M^2} + \frac{\gamma+2}{M_a^2} + \frac{\gamma}{(M_a\cos^2\Theta)^2}\right)\varepsilon^2 +$$
$$+\left(\frac{\gamma M^2+4}{(MM_a)^2} + \frac{\gamma+1-M_a^2(2-\gamma)}{M_a^4\cos^2\Theta}\right)\varepsilon -$$
$$-\left(\frac{2}{M^2M_a^4} + \frac{\gamma-1}{M_a^4\cos^2\Theta}\right) = 0,$$

$$v_i^{(2)} = G(1-\varepsilon)n_i + \varkappa g^{\alpha\beta}B_\alpha^{(1)}\frac{\partial x_i}{\partial u^\beta},$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1+\gamma M^2(1-\varepsilon)\left\{1-\frac{\operatorname{tg}^2\Theta}{M_a^2\left(\varepsilon-\frac{1}{M_a^2}\right)^2}\left(\frac{1+\varepsilon}{2}-\frac{1}{M_a^2}\right)\right\},$$

$$B_i^{(2)} = B_n n_i + \xi g^{\alpha\beta}B_\alpha^{(1)}\frac{\partial x_i}{\partial u^\beta}, \quad B_\alpha^{(1)} = B_k^{(1)}\frac{\partial x^k}{\partial u^\alpha},$$

$$M_a = \frac{G\sqrt{4\pi\rho_1}}{B_n}, \quad \varkappa = \frac{1-\varepsilon}{M_a(\varepsilon-1/M_a^2)}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

$$\xi = \frac{M_a^2-1}{\varepsilon M_a^2-1},$$

где Θ — угол между нормалью к фронту волны и направлением магнитного поля, $\gamma = C_P/C_V$, $B_k^{(1)}$ — проекции вектора индукции магнитного поля на соответствующую ось, верхний индекс (1) относится к значению перед фронтом ударной волны, M — число Маха, M_a — число Альвена, $g^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты метрического тензора непосредственно за фронтом волны.

Написанная система позволяет найти плотность, скорость, давление, компоненты магнитного поля за фронтом ударной волны, если известны соответствующие величины в невозмущенной среде. Нормальная компонента магнитного поля непрерывна при переходе через фронт волны.

Характеристическая форма уравнений магнитной гидродинамики такова:

$$l_i^{(1)}\frac{\partial v^i}{\partial t} + A^2\frac{c}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + l_i^{(2)}\frac{\partial B^i}{\partial t} +$$
$$+A\varepsilon G\left\{l_i^{(1)}\frac{\partial v^i}{\partial \tau} + A^2\frac{c}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \tau} + l_i^{(2)}\frac{\partial B^i}{\partial \tau}\right\} + \ldots = 0; \quad (2)$$

$$l_i^{(1)} = A\left\{cn_i - \frac{A^2B_nc\xi}{4\pi\rho}\frac{g^{\alpha\beta}B_\alpha^{(1)}(\partial x_i/\partial u^\beta)}{1-A^2B_n^2/(4\pi\rho)}\right\},$$

$$l_i^{(2)} = \frac{A^2c}{4\pi\rho}\xi\frac{g^{\alpha\beta}B_\alpha^{(1)}(\partial x_i/\partial u^\beta)}{1-A^2B_n^2/(4\pi\rho)},$$

$$A^2 = \frac{E-\sqrt{E^2-c^2B_n^2/(\pi\rho)}}{c^2B_n^2/(\pi\rho)},$$

$$E = \left\{B_n^2 + \left(\xi B_t^{(1)}\right)^2\right\}\frac{1}{4\pi\rho} + c^2, \quad \xi = \frac{1-1/M_a^2}{\varepsilon-1/M_a^2},$$

где c — скорость звука, B_n, B_t — нормальная и касательная компоненты вектора индукции магнитного поля, многоточием обозначены члены, содержащие производные по u^1 и u^2.

Предполагается, что перед ударной волной все параметры среды однородны и не зависят от времени.

Из уравнения (2) с учетом граничных условий на фронте волны можно получить выражение для изменения скорости ударной волны вдоль луча:

$$\frac{dG}{dt} = -Q_1\frac{1}{r_B} + Q_2\cdot 2H; \quad Q_1, Q_2 > 0. \quad (3)$$

Здесь Q_1, Q_2 зависят от числа Маха M, числа Альвена M_a и угла Θ. H — средняя кривизна фронта ударной волны, r_B — радиус кривизны сечения фронта ударной волны плоскостью, проходящей через нормаль и вектор $\mathbf{B}$. Символ $\frac{d}{dt}$ обозначает изменение соответствующей величины вдоль луча.

При выводе уравнения (3) мы учли, что скорость ударной волны постоянна вдоль фронта в начальный момент. Кроме того, мы приравняли нулю выражение

$$l_i^{(1)}\frac{\partial v^i}{\partial \tau} + A^2\frac{c}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \tau} + l_i^{(2)}\frac{\partial B^i}{\partial \tau},$$

учтя таким образом тот факт, что в начальный момент времени возмущения распространяются от фронта волны, а не к нему.

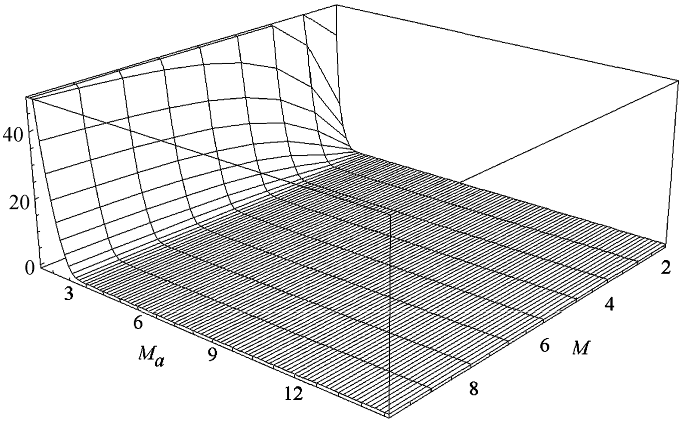
Из уравнения (3) вытекает условие неустойчивости:

$$2|H||r_B| < \Psi, \quad \Psi = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

В частном случае, когда радиус кривизны в данной точке фронта волны не зависит от направления, условие неустойчивости упрощается:

$$\Psi > 2.$$

График функции Ψ в зависимости от числа Маха и числа Альвена при $\gamma = 2$, $\Theta = 20°$ показан на рисунке.



Зависимость Ψ от числа Маха и числа Альвена при $\gamma = 2$, $\Theta = 20°$

Если магнитное поле направлено по нормали к фронту ударной волны, то неустойчивость отсутствует.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №01-02-16628).

Литература

1. *Дьяков С.П.* // ЖЭТФ. 1954. **27**. С. 288.
2. *Конторович В.М.* // Акуст. журн. 1959. **5**. С. 314.
3. *Иорданский С.В.* // Прикл. матем. и мех. 1957. **21**. С. 465.
4. *Андерсон Э.* Ударные волны в магнитной гидродинамике. М., 1968.

Поступила в редакцию
11.07.02

УДК 519.2:534

О ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ АЛГОРИТМАХ РАСПОЗНАВАНИЯ

Э. А. Кирнос, Ю. П. Пытьев

(*кафедра компьютерных методов физики*)

Рассмотрено влияние состава обучающей выборки на качество распознавания объектов в шуме алгоритмами «Кора», «TEMP», «R-метод», «CORAL». Алгоритмы рассматриваются на примере задачи распознавания искаженных шумом черно-белых изображений и сравниваются с алгоритмами морфологического анализа монохромных (gray scale) изображений [1, 2] и морфологического анализа изображений ламбертовых объектов [3]. Статья является продолжением исследований, описанных в работе [4].

Известные параметрические модели алгоритмов распознавания «Кора» [5], «TEMP» [6], «R-метод» [6] и «CORAL» [7] предназначены для решения задач распознавания с обучением. Алгоритм «Кора» является наиболее известным алгоритмом распознавания для булевых признаков [5]. Он основывается на построении информативных фрагментов описаний обучающих объектов — представительных наборов. Представительными наборами обучающих объектов считаются те фрагменты описаний обучающих объектов, которые по данному набору признаков достаточно часто встречаются в одном обучающем классе и почти не встречаются в остальных обучающих классах [4, 8]. Множество представительных наборов определяется заданием двух целочисленных параметров. Варьируя эти параметры, можно менять множество представительных наборов [8].

Алгоритмы «TEMP», «R-метод» и «CORAL» являются алгоритмами распознавания, основанными на обнаружении логических закономерностей в множествах обучающих объектов в случае разнотипных признаков: булевых, номинальных и количественных. Процесс построения логических закономерностей для подобных алгоритмов называется построением логических решающих правил [6]. Для этих трех алгоритмов решающее правило представляется в виде дерева решений. Такая форма представления правил позволяет легко интерпретировать их на языке функциональных свойств объекта [7].

Результаты исследования этих алгоритмов показали возможность их использования в задачах распознавания при ограниченной априорной информации. Этот вывод основан на сравнении этих алгоритмов с двумя морфологическими методами анализа изображений: методом морфологического анализа монохромных изображений [1, 2] и методом морфологического анализа изображений ламбертовых объектов [3]. В качестве исходных данных для тестирования алгоритмов использовались черно-белые изображения цифр размером 20×20 пикселей. Изображения для эксперимента формировались следующим образом. Генератор случайных чисел генерировал целые числа в интервале $[0, 100]$. Назовем уровнем шума $q\%$ целое число q, лежащее в интервале $[0, 100]$. Просматривался каждый пиксел изображения и анализировалось число, сгенерированное датчиком случайных чисел на очередном шаге. Если число попадало в интервал $[0, q]$, то пиксел инвертировался. Тем самым при 0%-м уровне шума ($q = 0$) получалось чистое изображение, при 50%-м уровне шума ($q = 50$) инвертировалось 50% пикселей изображения, а при 100%-м шу-