

УДК 517.958:621.372.8

## ОРТОГОНАЛЬНЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ПОЛОСЕ С РАЗРЫВНЫМ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

**В. В. Колюшенко, В. П. Моденов**

(кафедра математики)

Для решения задач резонансной дифракции электромагнитных волн в волноводе с разрывными импедансными граничными условиями предложена модифицированная схема метода Галеркина, учитывающая условие Мейкснера в особой точке.

### Введение

В данной работе предложена модифицированная схема неполного метода Галеркина для решения волноводно-резонансных задач электродинамики с разрывными импедансными граничными условиями. Импедансная модель позволяет с единых позиций рассматривать различные волноведущие структуры (волноводы с неидеальной проводимостью стенок, спиральные, гофрированные, гребенчатые и др.). В общем случае эти импедансные условия являются несамосопряженными.

Модифицированная схема неполного метода Галеркина, изложенная в работах [1, 2], основана на разложении решения по собственным функциям волновода с идеальными стенками.

Предложенная в настоящей работе схема основана на ортогональном методе Галеркина и учитывает условие Мейкснера в особой точке.

### Постановка задачи

Математическая задача заключается в нахождении решения уравнения Гельмгольца

$$\Delta_{x,z}u + k^2\varepsilon(x,z)u = 0 \quad (k = \omega/c) \quad (1)$$

в полосе  $\{-\infty < z < +\infty, 0 < x < l\}$ , где  $\varepsilon(x,z)$  — в общем случае комплексная кусочно-непрерывная функция координат, равная 1 при  $z < 0$  и  $z > d$ .

Решение уравнения (1) должно удовлетворять:

1) граничным условиям Дирихле на верхней и нижней границах за исключением конечного участка  $x = l; 0 \leq z \leq d$ :

$$\begin{aligned} u|_{x=0} = u|_{\substack{x=l; \\ z < 0; z > d}} = 0, \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + u|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq z \leq d \quad (|\alpha| \ll 1), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\alpha$  — приведенный импеданс (заданная комплекснозначная функция координаты  $z$ );

2) условиям сопряжения, заключающимся в требовании непрерывности функции  $u(x,z)$  и ее нормальной производной на линиях разрыва  $\varepsilon(x,z)$  и на границах нерегулярного участка

$$[u]_{z=0; z=d} = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=0; z=d} = 0, \quad 0 < x < l; \quad (3)$$

3) условиям Мейкснера в особых точках

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \text{Im} \int_{C_\rho} u \frac{\partial u^*}{\partial n} dl = 0, \quad (4)$$

где  $C_\rho$  — замкнутый контур, например окружность радиуса  $\rho$  с центром в особой точке;

4) условиям на бесконечности:

$$\begin{aligned} u(x,z) &= A \exp(i\gamma_1 z) \varphi_{n0}(x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} R_n \exp(-i\gamma_n z) \varphi_n(x), \quad z < 0; \\ u(x,z) &= B \exp(-i\gamma_1 z) \varphi_{n0}(x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} T_n \exp(i\gamma_n z) \varphi_n(x), \quad z > d, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\{\varphi_n(x)\}$  — система собственных функций задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} \varphi_n''(x) + \mu_n^2 \varphi_n(x) = 0, \quad \varphi_n(0) = 0, \quad \varphi_n(l) = 0; \\ \gamma_n = \sqrt{k^2 - \mu_n^2}, \quad \int_0^l |\varphi_n(x)|^2 dx = 1, \end{aligned} \quad (6)$$

$R_n, T_n$  — коэффициенты прохождения и отражения нормальных волн.

Заметим, что условие Мейкснера эквивалентно следующему условию

$$\text{Im} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial z} u^* dx|_{z=-0; d-0} = \text{Im} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial z} u^* dx|_{z=+0; d+0}. \quad (7)$$

### Приближенное решение задачи.

#### Модифицированная схема ортогонального метода Галеркина

Решение данной задачи существует и единственно [1].

Рассмотрим построение приближенного решения задачи (1)–(7).

Пусть

$$u^N = \sum_{n=1}^N C_n(z) X_n(x),$$

где  $X_n$  — собственные функции задачи Штурма-Лиувилля со слабо несамосопряженным ( $|\alpha| \ll 1$ ) граничным условием 3-го рода:

$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n^2 X_n(x) = 0, & x \in (0, l), \\ X_n(0) = 0, \\ \alpha X_n'(l) + X_n(l) = 0 & (|\alpha| \ll 1). \end{cases}$$

При условии  $|\alpha| \ll 1$  спектр собственных значений не вырожден. Комплекснозначные собственные функции  $X_n(x) = \sin \lambda_n x$  ортогональны в комплексном пространстве  $L_2(0, l)$  с псевдоскалярным произведением, а именно  $\int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = 0$ , и образуют базис [3, 4], квадрат псевдонормы отличен от нуля и равен  $\|X_n\|^2 = \frac{l + l\alpha^2 \lambda_n^2 + \alpha}{2(1 + \alpha^2 \lambda_n^2)}$ .

Для нахождения собственных значений, используя дифференциально-параметрический метод [5], приходим к задаче Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_n}{d\alpha} = -\frac{\lambda_n}{l + \alpha + l\alpha^2 \lambda_n^2}, \\ \lambda_n|_{\alpha=0} = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, \dots, N). \end{cases}$$

Коэффициенты  $C_n(z)$  найдем, потребовав выполнения следующих проекционных соотношений:

$$\int_0^l (\Delta_{x,z} u^N + k^2 \varepsilon(x, z) u^N) X_n(x) dx = 0, \quad n = 1, \dots, N.$$

Для удовлетворения условиям сопряжения (3) в интегральном смысле и условию Мейкснера в особых точках (4 или 7) запишем проекционные условия сшивания [1]

$$\begin{aligned} \int_0^l (u^{N*}|_{z=-0} - u^{N*}|_{z=+0}) \varphi_n(x) dx &= 0, \\ \int_0^l \left( \frac{\partial u^{N*}}{\partial z} \Big|_{z=-0} - \frac{\partial u^{N*}}{\partial z} \Big|_{z=+0} \right) X_n(x) dx &= 0, \\ \int_0^l (u^{N*}|_{z=d-0} - u^{N*}|_{z=d+0}) X_n(x) dx &= 0, \\ \int_0^l \left( \frac{\partial u^{N*}}{\partial z} \Big|_{z=d-0} - \frac{\partial u^{N*}}{\partial z} \Big|_{z=d+0} \right) \varphi_n(x) dx &= 0. \end{aligned}$$

Из этих условий следует выполнение соотношений (7) для приближенного решения уравнения:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_0^l \frac{\partial u^N}{\partial z} u^{N*} dx \Big|_{z=-0; d-0} &= \\ = \operatorname{Im} \int_0^l \frac{\partial u^N}{\partial z} u^{N*} dx \Big|_{z=+0; d+0}. \end{aligned}$$

Для нахождения коэффициентов  $C_n(x)$  получаем краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} C_m''(z) &= \sum_{n=1}^N P_{mn}(z) C_n(z); \\ \sum_{n=1}^N \{C_n'(0) \beta_{nm} + C_n(0) T_{nm}\} &= 2i\gamma_1 A \alpha_{1m}; \\ \sum_{n=1}^N \{C_n'(d) M_{nm} + C_n(d) \beta_{nm}\} &= 2B e^{-i\gamma_1 d} \alpha_{1m} \end{aligned} \right\} \quad (m = 1, \dots, N),$$

где

$$\begin{aligned} P_{mn}(z) &= (\mu_m)^2 \delta_{mn} - k^2 \int_0^l \varepsilon(x, z) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx, \\ \alpha_{pm} &= \int_0^l \varphi_p(x) X_m(x) dx, \quad \beta_{nm} = \int_0^l X_n(x) X_m^*(x) dx, \\ T_{nm} &= \sum_{p=1}^N i\gamma_p \alpha_{pn}^* \alpha_{pm}, \quad M_{nm} = \sum_{p=1}^N \frac{-1}{i\gamma_p} \alpha_{pn}^* \alpha_{pm}. \end{aligned}$$

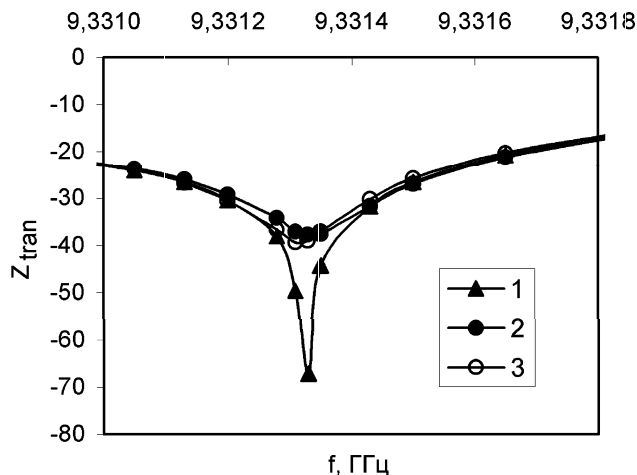
Решение, построенное по модифицированной схеме ортогонального метода Галеркина, является равномерно равносходящимся с решением, построенным по схеме неполного метода Галеркина [3]. Рассматривая приближенное решение, построенное по схеме ортогонального метода, и соответствующую часть ряда Фурье для точного решения, можно доказать, что коэффициенты разложения для приближенного решения стремятся к соответствующим коэффициентам Фурье при  $N \rightarrow \infty$ . Таким образом, приближенное решение, построенное по схеме ортогонального метода Галеркина, сходится к точному решению в пространстве  $L_2$ .

### Численный эксперимент

На конкретном примере проведем сравнение с решением рассматриваемой краевой задачи, полученным по модифицированной схеме неполного метода Галеркина, обоснованного в работе [1].

Рассмотрим плоский волновод ( $l = 20$  мм) с включением из поликора ( $\varepsilon = 9.6$ ) в виде квадрата ( $10 \times 10$  мм), находящегося на расстоянии 4 мм

от идеально проводящей стенки. На верхней стенке волновода на конечном участке длины, соответствующем включению, заданы импедансные граничные условия  $\alpha = -1.30 \cdot 10^{-4} + i \cdot 5.92 \cdot 10^{-4}$ . На рисунке приведен график функции (кривая 1), представляющей зависимость коэффициента пропускания  $Z_{\text{tran}} = 10 \lg(|T|^2)$  от частоты для случая идеальной стенки в области резонансной частоты. Эта функция имеет локальный экстремум при  $f \cong 9.3313$  ГГц.



Частотная зависимость коэффициента пропускания

Вместе с кривой 1, соответствующей волноводу с идеальными стенками, приведены кривые для случая импедансной стенки. Наличие импеданса заметно сказывается в области резонанса и приводит к сглаживанию резонансной кривой. Кривая 2 получена с

помощью модифицированной схемы неполного метода Галеркина, а кривая 3 представляет расчет по модифицированной схеме ортогонального метода Галеркина. Кривые 2 и 3 совпадают с высокой точностью.

### Заключение

В данной работе предложена модифицированная схема ортогонального метода Галеркина, учитывающая условие Мейкснера в особых точках. Данная схема, наряду с модифицированной схемой неполного метода Галеркина [1], может найти применение в задачах резонансной дифракции электромагнитных волн в волновод с разрывными импедансными граничными условиями.

### Литература

1. Конюшенко В.В., Моденов В.П. // Электрод. и техн. СВЧ, КВЧ и оптич. диап. 2002. № 1. С. 21.
2. Свешников А.Г., Ильинский А.С. // Сб. ВЦ МГУ Вычислительные методы и программирование. 1969. № 13. С. 27.
3. Modenov V.P. // Conference proceedings international symposium «Physics and Engineering of Millimeter and Submillimeter Waves». 1994. Kharkov, Ukraine. V. I. P. 98.
4. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
5. Моденов В.П. // ДАН СССР. 1987. 296, № 3. С. 536.

Поступила в редакцию  
20.09.02

## АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.123

### ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО $\nu e$ -РАССЕЯНИЯ МАССИВНОГО ДИРАКОВСКОГО НЕЙТРИНО

Б. И. Горячев

(НИИЯФ)

E-mail: big@srdlan.npi.msu.su

Показано, что электромагнитное  $\nu e$ -рассеяние, обусловленное аномальным магнитным моментом массивного нейтрино  $\mu_\nu$ , не позволяет однозначно определить величину  $\mu_\nu$ , если неизвестна масса нейтрино. Эффективное сечение такого рассеяния совпадает с сечением рассеяния на электроны заряженного лептона без аномального магнитного момента, но с эффективным электрическим зарядом  $e_{\nu_{\text{eff}}} < 10^{-9}e$ . Этот результат интерпретируется как следствие структурного эффекта, связанного с релятивистскими «дрожаниями» нейтрино. Показано, что радиационными процессами при взаимодействии массивного нейтрино с веществом можно пренебречь.

1. Физика массивных нейтрино привлекает большое внимание, в частности, в связи с попытками экспериментально обнаружить эффекты электромагнитного взаимодействия нейтрино с веществом,

обусловленного аномальным магнитным моментом нейтрино  $\mu_\nu$ . Здесь в первую очередь интересен процесс рассеяния нейтрино на электронах, для которого дифференциальное сечение образования