Литература

1. *Filatova S.A., Golubtsov P.V.* // Patt. Recogn. and Im. Anal., 1991. **1**, No. 2. P. 224.
2. *Filatova S.A., Golubtsov P.V.* // Artificial Intelligence, Expert Systems and Symbolic Computing, Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), 1992. P. 243.
3. *Filatova S.A., Golubtsov P.V.* // Proceedings of SPIE, V.1960, Automatic Object Recognition III, 1993. P. 483.
4. *Голубцов П.В., Сизарев Д.В.* // Проблемы управления и моделирования в сложных системах. II международная конференция г. Самара: (19–24 июня 2000 г.), С. 149.
5. *Пытьев Ю.П.* // Кибернетика. 1973. №6. С. 126.
6. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М., 1977.
7. *Пытьев Ю.П.* Математические методы интерпретации эксперимента. М., 1989.
8. *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. М., 1989.
9. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М., 1977.
10. *Пытьев Ю. П.* // ЖВМ и МФ. 1976. №6. С. 1584.

Поступила в редакцию 05.12.01
После переработки 20.11.02

УДК 535.12.01

ГЕНЕРАЦИЯ ТУННЕЛИРУЮЩИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ ЗОММЕРФЕЛЬДА В ЗАДАЧЕ О ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СТЕНКЕ

А. А. Власов

(*кафедра квантовой теории и высоких энергий*)

E-mail: vlasov@srdlan.npi.msu.su

Аналитическими расчетами доказана возможность существования эффекта классического туннелирования для частицы Зоммерфельда, ранее выявленная методами численного счета.

После появления знаменитой работы Дирака о релятивистской силе радиационного трения в классической электродинамике, было опубликовано множество статей и книг, посвященных данной тематике. Среди них отметим работы [1–5], где разбираются основные проблемы, возникающие при использовании уравнения Лоренца–Дирака: необходимость перенормировки и ее неоднозначность, расходящиеся («убегающие») решения и опережающее взаимодействие (заметим, что с аналогичными проблемами можно встретиться и в других классических полевых теориях — теории скалярного поля, гравитационного и т. п.).

Для их решения в начале 19 века были предложены различные модели классических «размазанных» (т. е. с конечными размерами) частиц (под словом частица далее будет подразумеваться чисто классический, а не квантовый, объект — заряженная броуновская частица, заряженная пылинка и т. д.).

Одной из таких моделей является модель Зоммерфельда — жесткая сфера радиуса a, массы m и заряда Q (частица Зоммерфельда) [6].

В так называемом квазистационарном нерелятивистском приближении уравнение движения протяженной частицы Зоммерфельда принимает вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \eta\left[\mathbf{v}(t-2a/c) - \mathbf{v}(t)\right], \qquad (1)$$

где a — радиус сферы, $\eta = \frac{Q^2}{3ca^2}$, $\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt$, $\mathbf{R}$ — координата ее центра, $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ — внешняя сила.

Было показано, что уравнение (1) не приводит к проблемам, свойственным уравнению Лоренца–Дирака [1–5].

В работах [7, 8] методами численного счета были исследованы новые приложения модели Зоммерфельда: классическое туннелирование, циклотронное движение и др.

Однако существует задача, в которой результат получается аналитически. Это — задача о туннелировании сквозь специальным образом выбранную потенциальную ступеньку.

Пусть частица Зоммерфельда движется в электростатическом поле $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$, задаваемом потенциалом ϕ в виде ступеньки высоты B и ширины S:

$$\begin{aligned} &\phi = B[\theta(z) - \theta(z-S)], \\ &E_z = -\frac{d\phi}{dz} = -B\delta(z) + B\delta(z-S). \end{aligned} \qquad (2)$$

Тогда сила, действующая на частицу Зоммерфельда, вычисляется так:

$$\begin{aligned} F_{\text{ext}} &= \int d\mathbf{r}\,\rho E_z = \\ &= \frac{QB}{4\pi a^2}\int d\mathbf{r}\,\delta(|\mathbf{r}-\mathbf{R}| - a)[-\delta(z) + \delta(z-S)]. \end{aligned}$$

С новыми переменными $\mathbf{r} \equiv \boldsymbol{\xi} + \mathbf{R}$, $d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\xi} = \xi^2 d\xi \sin\theta d\theta d\phi$, полагая $\cos\theta \equiv \mu$ откуда следует $z = R + \xi\mu$, интегрируя по ϕ и снимая дельта-функцию по ξ, получаем

$$F_{\mathrm{ext}} = \frac{QB}{2a}\int_{-1}^{+1} d\mu\,[-\delta(R+a\mu)+\delta(R+a\mu-S)] = $$
$$= \frac{QB}{2a}\left[-\int_{R-a}^{R+a} dw\delta(w) + \int_{R-a-S}^{R+a-S} dw\delta(w)\right].$$

Считая что $S \geqslant a$, выражение в квадратных скобках раскрывается так:

$$\begin{cases} 0, & R<-a,\\ -1, & -a<R<+a,\\ 0, & +a<R<S-a,\\ +1, & S-a<R<S+a,\\ 0, & R>S+a.\end{cases}$$

Перейдем к безразмерным величинам $y=R/L$, $\tau=ct/L$, $\delta=2a/L$. Выберем для простоты соотношение $S=L=2a$. Тогда уравнение (1) упрощается и принимает вид

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = k\left[\frac{dy(\tau-1)}{d\tau} - \frac{dy(\tau)}{d\tau}\right] + \lambda\Phi, \qquad (3)$$

где $k=\frac{2Q^2}{3mc^2a}$, $\lambda=\frac{QB}{mc^2}$, и

$$\Phi = \begin{cases} 0, & y<-1/2,\\ -1, & -1/2<y<1/2,\\ +1, & 1/2<y<3/2,\\ 0, & 3/2<y.\end{cases}$$

Предел точечности $a\to 0$ для силы F_{ext} дает выражение

$$\lim_{a\to 0} F_{ext} = QB[-\delta(R)+\delta(R-S)].$$

Оно приводит к следующему ньютоновскому уравнению движения точечного тела (без учета самодействия)

$$\begin{aligned} m\dot v &= QB[-\delta(R)+\delta(R-S)] = \\ &= QB\frac{d}{dR}[-\theta(R)+\theta(R-S)].\end{aligned} \qquad (4)$$

Уравнение (4) имеет первый интеграл:

$$m\frac{v^2}{2} + QB[\theta(R)-\theta(R-S)] = \mathrm{const} = m\frac{v_0^2}{2}.$$

Отсюда при $0<R<S$ получаем

$$v = \sqrt{v_0^2-(2QB/m)}.$$

Найденное решение описывает прохождение барьера (ступеньки), только если начальная скорость частицы v_0 превышает критическое значение v_{cr}, равное $\sqrt{2QB/m}$ или в безразмерных переменных

$$\frac{v_{\mathrm{cr}}}{c} \equiv \dot y_{\mathrm{cr}} = \sqrt{2\lambda}. \qquad (5)$$

Перейдем теперь к исследованию решений уравнения (3).

При $k\equiv 0$ уравнение (3) имеет в области $-1/2<y<+1/2$, $0<\tau<t_1$ решение

$$y=-1/2+v_0\tau-\lambda\tau^2/2, \quad \dot y = v_0-\lambda\tau. \qquad (6)$$

Отсюда следует, что координата $y=+1/2$ достигается (при движении с $\dot y>0$) в момент времени t_1:

$$t_1 = \frac{v_0-\sqrt{(v_0)^2-2\lambda}}{\lambda}. \qquad (7)$$

Соответственно потенциальный барьер преодолевается при $v_0>\sqrt{2\lambda}$, а минимальная скорость, необходимая для преодоления барьера (положительная часть силы при $1/2<y<3/2$ в уравнении (3) частицу не тормозит, а только разгоняет, т. е. не создает препятствий в движении частицы, и поэтому для анализа условия прохождения частицы через барьер можно рассматривать только область $-1/2<y<+1/2$), равна $v_0=\sqrt{2\lambda}$, при этом $\dot y(t_1)=0$ и

$$t_1 = v_0/\lambda = 2/v_0, \qquad (8)$$

т. е. если $t_1=2$, то начальная скорость должна равняться единице, а $\lambda=1/2$, если $t_1=3$, то начальная скорость должна равнятся $2/3$, а $\lambda=2/9$ и т. д.

Если параметр k в (3) не равен нулю, а координата $y=1/2$ достигается в момент времени $\tau=t_1$ так, что $\dot y(t_1)=0$ (и, значит, в предыдущие моменты времени скорость положительна), то дальнейшее движение частицы при $1/2<y<3/2$ определяется уравнением

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + k\frac{dy(\tau)}{d\tau} = k\frac{dy(\tau-1)}{d\tau} + \lambda \equiv f,$$

где $f>0$.

Это уравнение при условии $\dot y(t_1)=0$ имеет решение

$$\dot y = e^{(-k\tau)}\int_{t_1}^{\tau} dt' f(t') e^{(kt')} > 0,$$

т. е. частица преодолевает барьер и при $t>t_1$ продолжает движение.

Исходя из сказанного, построим «туннелирующие» решения уравнения (3).

Итак, предположим, что частица Зоммерфельда при своем движении достигает точку $y=-1/2$ при $\tau=0$, а точку $y=1/2$ — при $\tau=t_1$.

Пусть при $\tau<0$ частица движется с постоянной скоростью

$$\frac{dy}{d\tau} = v_0 = \mathrm{const}.$$

Пусть выполняется условие $\dot y(t_1)=0$ (т. е. барьер преодолевается), и пусть

$$t_1 = 2. \qquad (9)$$

Тогда интегрирование уравнения (3) проводится в два этапа — на интервале $0<\tau<1$, $-1/2<y<y_1$ и на интервале $1<\tau<2$, $y_1<y<1/2$.

Решение на первом интервале есть выражение

$$\dot{y}=v_0-\frac{\lambda}{k}+\frac{\lambda}{k}e^{(-k\tau)}, \tag{10}$$

а на втором —

$$\dot{y}=v_0-2\frac{\lambda}{k}+a_0e^{(-k\tau)}+\lambda\tau e^{(-k\tau+k)},$$

где

$$a_0=\frac{\lambda}{k}(e^{(k)}+1)-\lambda e^{(k)}. \tag{11}$$

Условия $y(0)=-1/2$, $y(1)=y_1$, $y(2)=1/2$ и $\dot{y}(2)=0$ сводятся к системе соотношений

$$v_0=f_1\lambda,$$
$$\lambda=1/f_2,$$

где

$$f_1=\frac{2}{k}-e^{(-k)}\left(1+\frac{1}{k}+\frac{e^{(-k)}}{k}\right), \tag{12}$$

$$f_2=\frac{1-e^{(-k)}}{k}+\frac{3-2e^{(-k)}-e^{(-2k)}}{k^2}-\\ -2e^{(-k)}\left(1+\frac{1}{k}+\frac{e^{(-k)}}{k}\right). \tag{13}$$

Анализ функций $f_1(k)$ и $f_2(k)$ показывает, что условие $v_0<\sqrt{2\lambda}$ для найденного решения выполняется в силу неравенства $f_1/\sqrt{2f_2}<1$, т. е. происходит туннелирование (начальная скорость принадлежит запрещенной области), однако в силу соотношения $f_1/f_2>1$ начальная скорость оказывается всегда больше единицы: $v_0>1$ (при этом при $k\equiv 0$ выполняется $v_0=1$ и $\lambda=1/2$ в соответствии с результатом (8)).

Пусть теперь вместо условия (9) справедливо

$$t_1=3. \tag{14}$$

Тогда интегрирование уравнения (3) проводится в три этапа — на интервале $0<\tau<1$, $-1/2<y<y_1$ с решением в форме (10), на интервале $1<\tau<2$, $y_1<y<y_2$ с решением в форме (11) и на интервале $2<\tau<3$, $y_2<y<1/2$ с решением в форме

$$\dot{y}=v_0-3\frac{\lambda}{k}+\\ +e^{(-k\tau)}\left(a_1+ke^{(k)}\left(a_0-\lambda e^{(k)}\right)\tau+k\lambda e^{(2k)}\tau^2/2\right),$$

где

$$a_1=e^{(2k)}\left(\frac{\lambda}{k}-2\lambda+2k\lambda-\lambda e^{(-k)}+\frac{\lambda}{k}e^{(-k)}\right). \tag{15}$$

Условия $y(t_1=3)=1/2$ и $\dot{y}(t_1=3)=0$ сводятся к системе соотношений

$$v_0=f_3\lambda,$$
$$\lambda=1/f_4,$$

где

$$f_3=\frac{e^{(-3k)}}{2k}\times\\ \times\left(6e^{(3k)}-(k^2+2k+2)e^{(2k)}-(4k+2)e^{(k)}-2\right), \tag{16}$$

$$f_4=\frac{e^{(-3k)}}{2k^2}\left((6k+12)e^{(3k)}-(3k^3+7k^2+10k+6)e^{(2k)}-\\ -(12k^2+10k+4)e^{(k)}-6k-2\right). \tag{17}$$

Анализ функций (16, 17) показывает, что условие $v_0<\sqrt{2\lambda}$ для найденного решения выполняется в силу неравенства $f_3/\sqrt{2f_4}<1$, т. е. происходит туннелирование (начальная скорость принадлежит запрещенной области), и в отличие от предыдущего случая, начальная скорость меньше единицы, но больше $2/3$ (при этом при $k\equiv 0$ справедливо $v_0=2/3$ и $\lambda=2/9$ в соответствии с результатом (8)).

Построение туннелирующих решений можно продолжить и дальше для $t_1=4,5,6,\dots$. Ясно, что с ростом величины t_1 уменьшается величина минимальной скорости v_0, необходимой для преодоления барьера, но существенно разрастается форма соответствующего решения.

Литература

1. *Erber T.* // Fortschr. Phys. 1961. **9**. P. 343.
2. *Page L.* // Phys. Rev. 1918. **11**. P. 377.
3. *Pearle P.* Electromagnetism / Ed. D. Tepliz. Plenum, N.Y., 1982, p. 211.
4. *Yaghjian A.* Relativistic Dynamics of a Charged Sphere. Lecture Notes in Physics, 11. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
5. *Rohrlich F.* // Am. J. Phys. 1997. **65**. P. 1051; Phys. Rev. 1999. **D60**. P. 084017.
6. *Sommerfeld A.* Göttingen Nachrichten. 1904. **29**; 1904. **363**; 1905. **201**.
7. *Vlasov A.A.* E-print Archieve: physics/9911059, 9912051, 0004026, 0103065.
8. *Власов А.А.* Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. №6. С. 15.

Поступила в редакцию
15.05.02