УДК 530.145:517.98

САМОСОГЛАСОВАННОСТЬ ВЕКТОРОВ И САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ГАМИЛЬТОНИАНА ДЛЯ БЕЗМАССОВОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Х. Афантитис, С. В. Каляшин

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Установлена связь между гамильтонианом и оператором движения в пространстве Шварцшильда. Эрмитовый гамильтониан построен посредством самосогласованного задания одночастотных векторов во внутренней и внешней областях. Показано, что корректная постановка задачи Коши допускает подобное задание.

Введение. Гамильтониан и оператор движения

Используются обозначения работы [1]. Лагранжиан, канонический импульс и гамильтониан системы равны соответственно

$$L=(1/2)\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi,$$
$$\pi=\sqrt{-g}\,g^{00}\,\partial_t\varphi,$$
$$\hat{H}=\int dx\,d\theta\,d\phi\,\left(\pi\,\partial_0\varphi-L\right),$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, $g^{\mu\nu}$ — обратный тензор и $g=\det|g_{\mu\nu}|$. В уравнении Ланграныжа выделяется угловая часть. Полевая функция разлагается по полной системе сферических функций $Y_J^{(m)}$

$$\varphi=\sum_{\substack{0\leqslant J<\infty\\ -J\leqslant m\leqslant J}}U(t,x)\,Y_J^{(m)}(\Omega),$$

и уравнение для радиально-временной функции имеет вид (при $j^2=J(J+1)$)

$$(x-1)^{-1}\,x^3\,\partial_t^2U-\partial_x\left(x\,(x-1)\,\partial_xU\right)+j^2U=0. \quad (1)$$

Переменные разделяются, и для радиальной функции R получаем

$$KR=\rho^{-1}\left\{\partial_x(-x\,(x-1)\,\partial_xR)+j^2\,R\right\}=\omega^2\,R, \quad (2)$$
$$\rho(x)=x^3\,(x-1)^{-1}.$$

Для гамильтониана получаем выражение

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\left\{\frac{x^3(\partial_t\varphi)^2}{(x-1)}+(x^2-x)(\partial_x\varphi)^2+\right.$$
$$\left.+(\partial_\theta\varphi)^2+\frac{(\partial_\phi\varphi)^2}{\sin^2\theta}\right\}. \quad (3)$$

Функция φ является сферически симметричной, стремящейся к нулю при $x\to\infty$. Интегрируя по частям выражение (3), а также учитывая уравнение Лагранжа и выражение (1), получаем

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\left\{\frac{x^3(\partial_t\varphi)^2}{(x-1)}-\varphi\hat{T}\varphi\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{\substack{0\leqslant J<\infty\\ -J\leqslant m\leqslant J}}\int dx\frac{x^3}{x-1}\left\{(\partial_tU)^2-U\partial_t^2U\right\},$$

$$\hat{T}\varphi=$$
$$=\left(\partial_x\left(x(x-1)\partial_x\varphi\right)+\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\varphi\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\varphi\right).$$

Для упрощения вида операторов используем выражение, в котором отброшены численный коэффициент и сумма. В качестве $U(t,x)$ примем решения временного волнового уравнения

$$U(t,x)=\left(A^2+B^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(A\cos\omega t+B\sin\omega t\right)R(x).$$

Гамильтониан равен

$$H=\int dx\rho R\omega^2R=$$
$$=\int dx\,\rho R\left\{\rho^{-1}\left(\partial_x\left(x(1-x)\partial_xR\right)+j^2R\right)\right\}= \quad (4)$$
$$=\int dx\rho RKR.$$

Выражение (4) показывает, что оператор K, введенный в (2), совпадает с плотностью радиальной части гамильтониана.

Область определения гамильтониана построим из прямой суммы областей определения оператора K для внутренней и внешней областей, $H_{(e)}^{\rho}$ и $H_{(i)}^{\tilde{\rho}}$ в обозначениях статьи [1]. Для самосопряженности гамильтониана во всем пространстве необходимо выполнение условия

$$\left(\int\limits_0^1+\int\limits_1^\infty\right)dx\times$$
$$\times\left\{\Phi^*\partial_x\left(x(1-x)\partial_x\Psi\right)-\partial_x\left(x(1-x)\partial_x\Phi^*\right)\Psi\right\}=0,$$

где Ψ и Φ произвольные векторы из области определения, точка $x=1$ выделена, поскольку является особой. Интегрирование по частям дает

$$x(1-x)\,\left(\Phi^*\,\partial_x\Psi-\partial_x\Phi^*\,\Psi\right)\big|_0^1+$$
$$+\,x(1-x)\,\left(\Phi^*\,\partial_x\Psi-\partial_x\Phi^*\,\Psi\right)\big|_1^\infty=0. \quad (5)$$

При $x \to \infty$ векторы $\Psi, \Phi \to 0$, а при $x \to 0$ условие (5) выполнено за счет асимптотики рассматриваемых функций [1]. Получаем

$$\begin{aligned} &\{x\,(x-1)\,(\Phi^*\,\partial_x\Psi - \partial_x\Phi^*\,\Psi)\}_{1+0} - \\ &- \{x\,(x-1)\,(\Phi^*\,\partial_x\Psi - \partial_x\Phi^*\,\Psi)\}_{1-0} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Условие (6) выполнено для функций состояния (принадлежащих $H^{\rho}_{(e)}$ и $H^{\tilde\rho}_{(i)}$), в силу их асимптотики при $x \to 1$ [1], но не для собственных векторов. Последние могут быть продолжены через точку $x = 1$ согласованно, для выполнения условия (6). При рассмотрении задачи Коши в разделе 2 показано, что между внутренними и внешними значениями функций должна существовать связь.

1. Разложение функции

В терминах «черепашьей» координаты $\xi = x + \ln|x-1|$ и функции $u(\xi) = x(\xi)R(x(\xi))$ уравнение (2) запишется в виде

$$K_\xi u(\xi) = \{-\partial^2_\xi + (x-1)\,x^{-4}\,(x\,j^2+1)\}\,u(\xi) = \omega^2\,u(\xi). \tag{7}$$

Поскольку K_ξ самосопряжен, то согласно работам [2-3], существуют матричные эрмитовые непрерывные справа функции распределения и наборы независимых решений уравнения (7), $\{\sigma_{ij}(\lambda), h_k(\xi,\lambda)\}$ для внешней и $\{\tilde\sigma_{ij}(\lambda), \tilde h_k(\xi,\lambda)\}$ для внутренней областей $(i,j,k = 1,2)$, такие что матрицы $\sigma(\mu_1) - \sigma(\mu_2)$ и $\tilde\sigma(\mu_1) - \tilde\sigma(\mu_2)$ положительно определенные для $\mu_1 > \mu_2$, и для любой f во внешней области такой, что $(f/x) \in H^{\rho}_{(e)}$ $(f, K_\xi f \in L^2(-\infty,\infty))$ и для любой $\tilde f$ во внутренней области такой, что $\left(\tilde f/x\right) \in H^{\tilde\rho}_{(i)}$ $(\tilde f, K_\xi \tilde f \in L^2(-\infty,0))$, верны разложения

$$f(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{i,k=1,2} d\sigma_{ik}(\lambda)\,h_i \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta\,h_k\,f,$$

$$\tilde f(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{i,k=1,2} d\tilde\sigma_{ik}(\lambda)\,\tilde h_i \int\limits_{-\infty}^{0} d\eta\,\tilde h_k\,\tilde f.$$

Для $\lambda > 0$ можно ввести новую переменную $\lambda = \omega^2$, диагонализовать σ_{ij} и $\tilde\sigma_{ij}$ и перенормировать собственные векторы. Для $\lambda < 0$ во внешней области можно показать, что $\sigma_{ij} = 0$. Во внутренней области, так как при $\xi \to -\infty$ $(x \to 1)$ уравнение (7) сводится к волновому $\partial^2_\xi u + \lambda u = 0$, можно выбрать собственные векторы с асимптотикой $\tilde h \sim Ae^{i\xi\sqrt{\lambda}}$ и $\tilde h_0 \sim Be^{-i\xi\sqrt{\lambda}}$, но $\tilde h \notin L^2(-\infty,0)$. Таким образом получаем

$$f = \int\limits_0^{\infty} d\omega\,h_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta\,h_1\,f + \int\limits_0^{\infty} d\omega\,h_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta\,h_2\,f,$$

$$\tilde f = \int\limits_0^{\infty} d\omega\,\tilde h_1 \int\limits_{-\infty}^{0} d\eta\,\tilde h_1\,f + \int\limits_0^{\infty} d\omega\,\tilde h_2 \int\limits_{-\infty}^{0} d\eta\,\tilde h_2\,f + \\ + \int\limits_{-\infty}^{0} d\sigma_0\,\tilde h_0 \int\limits_{-\infty}^{0} d\eta\,\tilde h_0\,f,$$

а векторы удовлетворяют свойствам $(i,k = 1,2)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi\,h_i(\omega)\,h_k(\omega') = \int\limits_{-\infty}^{0} d\xi\,\tilde h_i(\omega)\,\tilde h_k(\omega') = \delta_{ik}\,\delta(\omega-\omega'),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} d\xi\,\tilde h_0(\xi)\,\tilde h_i(\xi) = 0.$$

Переход в пространство x (помимо преобразования $\xi \to x$ следует поделить каждую функцию на x) дает следующее разложение для $F(x) = (f(\xi(x))/x) \in H^{\rho}_{(e)}$ и $\tilde F(x) = \left(\tilde f(\xi(x))/x\right) \in H^{\tilde\rho}_{(i)}$:

$$F(x) = \int\limits_0^{\infty} d\omega\,v_1 \int\limits_1^{\infty} dy\,\rho\,v_1\,F(y) + \int\limits_0^{\infty} d\omega\,v_2 \int\limits_1^{\infty} dy\,\rho\,v_2\,F(y),$$

$$\tilde F(x) = \int\limits_0^{\infty} d\omega\,\tilde v_1 \int\limits_0^{1} dy\,\tilde\rho\,\tilde v_1\,\tilde F + \int\limits_0^{\infty} d\omega\,\tilde v_2 \int\limits_0^{1} dy\,\tilde\rho\,\tilde v_2\,\tilde F + \\ + \int\limits_{-\infty}^{0} d\tilde\sigma_0\,\tilde v_0 \int\limits_0^{1} dy\,\tilde\rho\,\tilde v_0\,\tilde F,$$

где $v_{1,2} = h_{1,2}/x$, $\tilde v_{0,1,2} = \tilde h_{0,1,2}/x$ — решения уравнения (2) со свойствами

$$\int\limits_1^{\infty} dx\,\rho\,v_i(\omega)\,v_k(\omega') = \int\limits_0^{1} dy\,\tilde\rho\,\tilde v_i(\omega)\,\tilde v_k(\omega) = \delta_{ik}\,\delta(\omega-\omega'),$$

$$\int\limits_0^{1} dy\,\tilde\rho(y)\,\tilde v_0(y)\,\tilde v_i(y) = 0.$$

2. Задача Коши в пространстве Шварцшильда

Задачу Коши рассмотрим в координатах Крускала

$$y = \begin{cases} e^{\frac12(\xi-t)}, & x<1, \\ -e^{\frac12(\xi-t)}, & x>1, \end{cases}$$

$$\eta = e^{\frac12(\xi+t)}, \quad 0<x<\infty.$$

Пространство $0<x<\infty$, $-\infty<t<\infty$ отражается на область $\eta>0$, $-\infty<y\eta<1$. Обозначив $U(t,x) = W(y,\eta)$, уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned} \hat L[W] = \partial_{y\eta}W - (e^{-x}/x^2)\,(y\,\partial_y W + \eta\,\partial_\eta W) + \\ + (e^{-x}/x^3)\,j^2\,W = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Воспользуемся методом Римана. Введем сопряженный оператор

$$\hat{M}[V] = \partial_{y\eta} V + \partial_y \left((e^{-x}/x^2)\, y\, V \right) + \\ + \partial_\eta ((e^{-x}/x^2)\, \eta\, V) + (e^{-x}/x^3)\, j^2\, V.$$

Тогда для любой замкнутой области D и любых функций W, V получаем

$$\iint_D dy\, d\eta (V \hat{L}[W] - \hat{M}[V] W) = \\ = \iint_D dy\, d\eta \left(\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial \eta} \right) = \oint_C (H d\eta - K dy),$$

где граница C замкнутой области D обходится в положительном направлении, второе равенство следует из формулы Грина, и обозначены

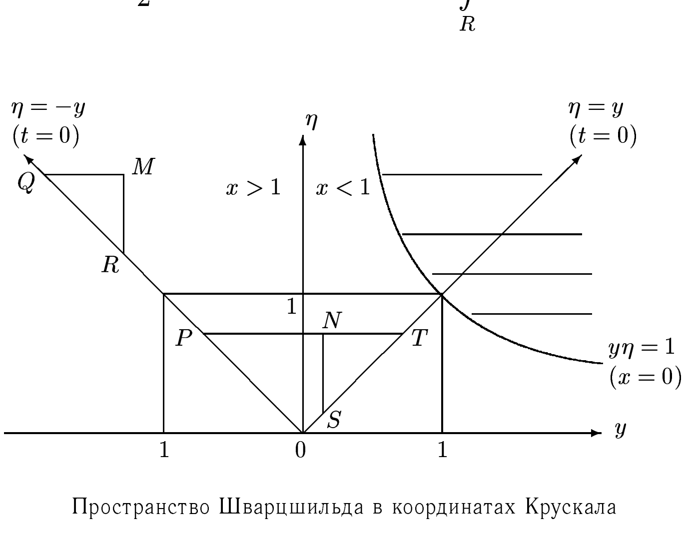
$$H = \frac{1}{2} \partial_\eta\, (VW) - (\partial_\eta V - aV)\, W,$$
$$K = \frac{1}{2} \partial_y\, (VW) - (\partial_y V - bV)\, W,$$
$$a = -y x^{-2} e^{-x}, \quad b = -\eta x^{-2} e^{-x}.$$

Рассмотрим, например, замкнутый контур MQR на рисунке и выберем в качестве функции W решение уравнения $\hat{L}[W] = 0$, а в качестве функции V — функцию Римана, которая однозначно определяется следующими условиями:

$$\begin{array}{ll} \hat{M}[V] = 0, & \text{в области D} \\ \partial_\eta V - aV = 0, & \text{на } MR \\ \partial_y V - bV = 0, & \text{на } MQ \\ V(M) = 1. & \end{array}$$

Тогда легко получить, что в точке M решение определяется начальными данными и может быть записано в виде

$$W(M) = \frac{1}{2} \{(V\, W)_R + (V\, W)_Q\} + \int_R^Q (H\, d\eta - K\, dy).$$



Пространство Шварцшильда в координатах Крускала

Подобные рассуждения применимы и для точки N, но для нее могут быть использованы два замкнутых контура: либо NST, либо $NPOS$. Точка $x = 1$, т. е. $y = 0$, регулярна в координатах Крускала и ее пересечение по пути NP законно. Получаем соответственно для контура NST

$$W(N) = \frac{1}{2} \{(V\, W)_S + (V\, W)_T\} + \int_S^T (H\, d\eta - K\, dy),$$

и для контура $NPOS$

$$W(N) = \frac{1}{2} \{(VW)_S + (VW)_P\} + \int_0^P (H d\eta - K dy) - \\ - \int_0^S (H d\eta - K dy).$$

Оба результата должны совпасть, и получаем условие связи:

$$\frac{1}{2}\, (V\, W)_P + \int_0^P (H\, d\eta - K\, dy) = \\ = \frac{1}{2}\, (V\, W)_T + \int_0^T (H\, d\eta - K\, dy).$$

Итак, начальные данные решения (8) должны задаваться самосогласованно слева и справа от $x = 1$, и связь эта сохраняется и при $t > 0$.

3. Согласование собственных векторов в точке $x = 1$

Составим согласование так, чтобы для собственных векторов было верно условие (6), которое в терминах «черепашьей» координаты ξ принимает вид

$$\{h_1^* \partial_\xi h_2 - \partial_\xi h_1^* h_2\}_{\substack{\xi \to -\infty \\ (1+0)}} - \left\{ \tilde{h}_1^* \partial_\xi \tilde{h}_2 - \partial_\xi \tilde{h}_1^* \tilde{h}_2 \right\}_{\substack{\xi \to -\infty \\ (1-0)}} = 0. \tag{9}$$

Собственные векторы дискретного спектра $\lambda < 0$ при $\xi \to -\infty$ $(x \to 1 - 0)$ стремятся к нулю экспоненциально и могут быть продолжены во внешнюю область нулевой функцией. Рассмотрим случай $\lambda > 0$. С помощью суперпозиции можно составить векторы, имеющие при $x \to 1$, т. е. $\xi \to -\infty$, асимптотики

$$\begin{array}{ll} \text{внешняя область:} & h_1 \to a_1 \sin(\xi\omega), \\ & h_2 \to a_2 \cos(\xi\omega), \\ \text{внутренняя область:} & \tilde{h}_1 \to b_1 \sin(\xi\omega), \\ & \tilde{h}_2 \to b_2 \cos(\xi\omega). \end{array}$$

Условие (9) выполняется для собственных векторов одинакового ω, если сопоставить векторы $h_1 \leftrightarrow \tilde{h}_1$ и $h_2 \leftrightarrow \tilde{h}_2$ при $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$. Для произвольного вектора с данным ω условие (9) выполняется при сопоставлении векторов ψ во внешней и $\tilde{\psi}$ во внутренней областях в виде

$$\psi(\xi,\omega) = A\,h_1(\xi,\omega) + B\,h_2(\xi,\omega) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \tilde{\psi}(\xi,\omega) = A\,\tilde{h}_1(\xi,\omega) + B\,\tilde{h}_2(\xi,\omega).$$

Равенство коэффициентов в разных областях существенно. Аналогично, функции f и $\tilde{f}$ во внешней и внутренней областях соответственно можно считать продолжением друг друга, если их разложения имеют вид

$$\int\limits_0^\infty d\omega\{A(\omega)h_1 + B(\omega)h_2\} = f(\xi) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \tilde{f}(\xi) = \int\limits_0^\infty d\omega\{A(\omega)\tilde{h}_1 + B(\omega)\tilde{h}_2\},$$

аналогично в пространстве x

$$\int\limits_0^\infty d\omega\{A(\omega)v_1 + B(\omega)v_2\} = F(x_{(e)}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \tilde{F}(x_{(i)}) = \int\limits_0^\infty d\omega\{A(\omega)\tilde{v}_1 + B(\omega)\tilde{v}_2\}.$$

Можно считать пары $\{f,\tilde{f}\}$ или $\{F,\tilde{F}\}$ одним состоянием.

Мы рассмотрели вопрос о самосопряженности гамильтониана в пространстве Шварцшильда, которое ассоциируется с существованием черной дыры. В работе [1] было показано, что оператор движения эрмитов. В настоящей статье установлена связь между оператором движения и гамильтонианом, которая использована для построения эрмитового гамильтониана во всем пространстве. Это приводит к тому, что особая точка $x=1$ начинает «больше походить» на регулярную точку, какой она является в других координатах. Отметим, что спектр гамильтониана может быть не ограниченным снизу, что, возможно, является лишь квантовым выражением существования такого мощного притягательного центра, как черная дыра.

Авторы искренне благодарны В. Г. Кадышевскому и О. А. Хрусталеву за постоянный интерес к работе и ценные замечания.

Литература

1. *Афантитис X., Каляшин С.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2003. №1. С. (Moscow University Phys. Bull. 2003. No. 1).
2. *Наймарк М.А.* Линейные Дифференциальные Операторы. М., 1969.
3. *Титчмарш Э.Ч.* Разложение по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями II порядка. I. М., 1969.

Поступила в редакцию
17.06.02

УДК 519.2:534

О ЗАДАЧЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ ДИАГНОСТИКИ ЗАБОЛЕВАНИЙ ЖЕЛУДОЧНО-КИШЕЧНОГО ТРАКТА

В. А. Газарян, Н. В. Иваницкая, Ю. П. Пытьев, А. К. Шаховская*)

(*кафедра компьютерных методов физики*)

E-mail: pytyev@phys.msu.su

Работа посвящена созданию нового комплексного метода компьютерной оценки состояния больных с функциональными нарушениями в системе пищеварения, включающего предварительную постановку диагноза, учитывающую изменения психоэмоциональной сферы. В статье приведены результаты практических применений разработанного метода.

В последнее время все больше внимания уделяется заболеваниям, в генезе которых ведущее место занимают эмоционально-стрессовые моменты [1]. Так например, среди страдающих заболеваниями желудочно-кишечного тракта (ЖКТ) довольно высок процент больных с функциональными расстройствами, обусловленными нарушениями моторики и тонуса толстой кишки, причем пусковыми механизмами этих расстройств являются стрессовые воздействия или длительное психоэмоциональное напряжение.

При изучении проблемы объективизации данных о психосоматическом статусе больных с заболеваниями сердечно-сосудистой системы и ЖКТ отечественными и зарубежными специалистами широко используются специальные опросники и психологические тесты [1, 2].

*) ГУ НИИ питания РАМН.