УДК 530.145

# ОДНОПЕТЛЕВАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА В ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА С BRST-ИНВАРИАНТНЫМ МАССОВЫМ СЛАГАЕМЫМ

**Е. А. Андрияш, К. В. Степаньянц**

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: stepan@phys.msu.su

**С помощью обобщенной техники т'Хофта–Вельтмана вычислена расходящаяся часть однопетлевого эффективного действия в теории Янга–Миллса в специальной калибровке, содержащей четвертые степени духовых полей и допускающей добавление BRST-инвариантного массового слагаемого. Результат является BRST-инвариантным и определяет связь голых и перенормированных массы, константы связи и параметра калибровки.**

## Введение

Хорошо известно, что добавление массового слагаемого к действию Янга–Миллса нарушает калибровочную инвариантность. Поэтому обычно массивные калибровочные поля вводятся с помощью механизма спонтанного нарушения симметрии [1]. Тем не менее существует и другой подход. Он основан на том, что при квантовании теории Янга–Миллса необходимо фиксировать калибровку и добавлять к действию духовый лагранжиан [2]. Полный лагранжиан при этом инвариантен относительно BRST-преобразований, оставшихся от калибровочных преобразований. В принципе можно построить массовое слагаемое, инвариантное только относительно этих остаточных преобразований. В случае произвольной калибровки эта задача не решена. Однако существует специальная калибровка, содержащая четвертые степени духовых полей, допускающая существование BRST-инвариантного массового слагаемого [3–5]. Соответствующая модель не унитарна [4, 6–10], но, как было доказано [3, 10–12], является мультипликативно перенормируемой. Несмотря на отсутствие унитарности, такая теория с BRST-инвариантным массовым слагаемым может быть использована, например, для регуляризации инфракрасных расходимостей или изучения механизма динамической генерации массы для глюонного поля [13]. Одним из интересных объектов исследования также является изучение квантовых свойств такой теории и, в частности, проверка BRST-инвариантности эффективного действия. Однопетлевая [13] и двухпетлевая поправки [14] были вычислены с помощью диаграммной техники. Однако вычисления достаточно громоздки, и желательно проверить их, используя другой метод вычислений, например с помощью техники т'Хофта–Вельтмана [15], которая изначально была разработана для ограниченного класса теорий и затем обобщена на произвольный случай в работе [16]. В рамках метода т'Хофта–Вельтмана расходящуюся часть однопетлевого эффективного действия можно вычислить при помощи только алгебраических операций. В настоящей работе такое вычисление проводится для теории Янга–Миллса с BRST-инвариантным массовым слагаемым.

## 1. Теория Янга–Миллса с BRST-инвариантным массовым слагаемым

В случае, когда калибровочная инвариантность в теории Янга–Миллса фиксируется добавлением к действию некоторых специальных слагаемых, содержащих четвертые степени духовых полей, к действию можно добавить массовое слагаемое, инвариантное относительно BRST-преобразований с точностью до полной производной. Действие полученной теории имеет вид

$$S=\frac{1}{e^2}\mathrm{tr}\int d^4x\Big(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^2+\alpha B^2-2\partial_\mu B\,A^\mu-\\ -i\alpha B\{c\,\bar c\}-2i\partial_\mu\bar c\mathcal{D}^\mu c+\alpha c^2\bar c^2-m^2(A_\mu^2-2i\alpha c\bar c)\Big), \qquad (1)$$

где $A_\mu$ — неабелево калибровочное поле, $c$ и $\bar c$ — антикоммутирующие скалярные духовые поля, $B$ — вспомогательное поле,

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+[A_\mu,A_\nu]$$

– тензор напряженности калибровочного поля,

$$\mathcal{D}_\mu c=\partial_\mu c+[A_\mu,c]$$

— ковариантная производная, $\alpha$ — постояная, определяющая калибровку, а величина $m$ — масса калибровочного поля. Действие (1) является инвариантным относительно следующих BRST-преобразований:

$$\begin{aligned}&\delta_b A_\mu(x)=\varepsilon_b\mathcal{D}_\mu c(x);\\&\delta_b c(x)=-\varepsilon_b c(x)^2;\\&\delta_b\bar c(x)=i\varepsilon_b B(x);\\&\delta_b B(x)=0,\end{aligned} \qquad (2)$$

где $\delta_b\varphi$ — изменение поля $\varphi$ под действием BRST-преобразований, а $\varepsilon_b$ — постоянный антикоммутирующий параметр. Кроме того, существует еще одна инвариантность относительно антиBRST-преобразований:

$$\begin{aligned}
&\delta_a A_\mu(x) = \varepsilon_a \mathcal{D}_\mu \bar{c}(x);\\
&\delta_a c(x) = -\varepsilon_a (iB(x) + \{c(x), \bar{c}(x)\});\\
&\delta_a \bar{c}(x) = -\varepsilon_a \bar{c}(x)^2;\\
&\delta_a B(x) = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\varepsilon_a$ — другой антикоммутирующий параметр.

## 2. Вычисление расходящейся части однопетлевого эффективного действия

Для вычисления расходящейся части однопетлевого эффективного действия можно использовать различные методы, например диаграммную технику или метод т'Хофта–Вельтмана [15, 16]. В настоящей работе мы используем второй метод. Напомним его основные идеи.

Хорошо известно [1], что для теории с классическим действием $S[\varphi_i]$ однопетлевое эффективное действие записывается в виде

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2} \operatorname{Str} \ln D_i{}^j, \tag{4}$$

где

$$D_i{}^j = \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi^i \delta\varphi_j} \tag{5}$$

— оператор второй вариации классического действия, через $\varphi$ обозначен весь набор полей теории (в частности, для модели (1) это набор $(A_\mu, c, \bar{c})$), а Str представляет собой сумму диагональных элементов, которые берутся со знаком плюс для коммутирующих полей и со знаком минус для антикоммутирующих полей.

В наиболее общем случае оператор (5) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
D_i{}^j = {} & K^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_L}{}_i{}^j\, \nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2}\ldots\nabla_{\mu_L} + \\
& + S^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{L-1}}{}_i{}^j\, \nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2}\ldots\nabla_{\mu_{L-1}} + \\
& + W^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{L-2}}{}_i{}^j\, \nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2}\ldots\nabla_{\mu_{L-2}} + \\
& + N^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{L-3}}{}_i{}^j\, \nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2}\ldots\nabla_{\mu_{L-3}} + \\
& + M^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{L-4}}{}_i{}^j\, \nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2}\ldots\nabla_{\mu_{L-4}} + \ldots,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $S$, $W$, $N$ и $M$ — некоторые тензорные структуры, симметричные по лоренцевым индексам, а через $\nabla_\mu$ обозначена ковариантная производная, построение которой можно пояснить следующим примером:

$$\nabla_\alpha T^\beta{}_i{}^j = \partial_\alpha T^\beta{}_i{}^j + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} T^\gamma{}_i{}^j + \omega_{\alpha i}{}^k T^\beta{}_k{}^j - T^\beta{}_i{}^k \omega_{\alpha k}{}^j,$$

где $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ — символы Кристоффеля

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}),$$

а $\omega_{\mu i}{}^j$ — связность в главном расслоении.

В работе [16] для оператора (6) была в явном виде вычислена расходящаяся часть однопетлевого эффективного действия (4). В частном случае, когда оператор (6) имеет второй порядок по производным ($L = 2$), а пространство является плоским, соответствующий результат при использовании, например, регуляризации обрезанием внешнего импульса, можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(1)}_\infty = {} & -\frac{1}{16\pi^2} \ln\frac{M}{\mu} \operatorname{Str} \int d^4x \left\langle \frac{1}{2}\hat{W}^2 - \hat{W}\,\hat{S}^2 - \right.\\
& - 2\partial_\mu \hat{S}\,\hat{W}\,\hat{K}^\mu + \frac{1}{4}\hat{S}^4 + \frac{1}{3}\Big(\partial_\mu \hat{S}^\mu \hat{S}^2 - 2\partial_\mu \hat{S}\,\hat{K}^\mu \hat{S}^2 - \\
& - \partial_\mu \hat{S}\,\hat{S}\,\hat{S}^\mu + 2\partial_\mu \hat{S}\,\hat{S}^2 \hat{K}^\mu\Big) + \partial_\mu \hat{S}\,\partial_\nu \hat{S}^\nu \hat{K}^\mu - \\
& \left. - \frac{1}{2}\partial_\mu \hat{S}\,\partial_\nu \hat{S}\,\Big(-\hat{K}^{\mu\nu} + 2\hat{K}^\mu \hat{K}^\nu + 2\hat{K}^\nu \hat{K}^\mu\Big) \right\rangle,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $M$ — импульс ультрафиолетового обрезания, а $\mu$ — точка нормировки. Используемые в формуле (7) обозначения могут быть пояснены следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\hat{S}_i{}^j \equiv (Kn)^{-1}{}_i{}^k (Sn)_k{}^j;\\
&\hat{K}^\mu{}_i{}^j \equiv (Kn)^{-1}{}_i{}^k (Kn)^\mu{}_k{}^j;\\
&(Sn)_i{}^j \equiv S^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{L-1}}{}_i{}^j n_{\mu_1} n_{\mu_2}\ldots n_{\mu_{L-1}};\\
&(Kn)^\mu{}_i{}^j \equiv K^{\mu\mu_2\ldots\mu_L}{}_i{}^j n_{\mu_2}\ldots n_{\mu_L};\\
&(Kn)_i{}^k (Kn)^{-1}{}_k{}^j = \delta_i^j.
\end{aligned}$$

При этом $n_\mu$ — единичный вектор, а угловые скобки обозначают операцию интегрирования по угловым переменным, в результате которой получается, что

$$\begin{aligned}
\langle n_{\mu_1} n_{\mu_2} \ldots n_{\mu_{2m}} \rangle \equiv {} & \frac{1}{2^m (m+1)!} \times \\
& \times (g_{\mu_1\mu_2}\, g_{\mu_3\mu_4} \ldots g_{\mu_{2m-1}\mu_{2m}} + \\
& + \text{перестановки } (\mu_1 \ldots \mu_{2m})).
\end{aligned}$$

Выражение для второй вариации действия (1) приводится в Приложении. На его основе были построены матрицы $K$, $S$ и $W$, после чего расходящаяся часть однопетлевого эффективного действия была найдена при помощи формулы (7). При этом был получен следующий результат:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(1)}_\infty = {} & \frac{c_2}{8\pi^2} \ln\frac{M}{\mu} \times \\
& \times \operatorname{tr} \int d^4x \bigg( \frac{1}{2}\left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{13}{6}\right)\left(\partial_\mu A^R_\nu - \partial_\nu A^R_\mu\right)^2 + \\
& + \left(-\frac{3\alpha}{4} - \frac{17}{12}\right)\left(\partial_\mu A^R_\nu - \partial_\nu A^R_\mu\right)\left(A^R_\mu A^R_\nu - A^R_\nu A^R_\mu\right) + \\
& + \frac{1}{2}\left(-\alpha - \frac{2}{3}\right)\left(A^R_\mu A^R_\nu - A^R_\nu A^R_\mu\right)^2 - \\
& - \frac{\alpha^2}{4}(B^R)^2 + \frac{\alpha}{2}\partial_\mu B^R A^R_\mu + i\frac{\alpha^2}{2} B^R \{c^R \bar{c}^R\} + \\
& + \frac{\alpha - 3}{4} m^2 (A^R_\mu)^2 - i\frac{\alpha^2}{2} m^2 c^R \bar{c}^R - \frac{3}{4}\alpha^2 (c^R)^2 (\bar{c}^R)^2 + \\
& + i\frac{\alpha + 3}{2}\partial_\mu \bar{c}^R\,\partial_\mu c^R + i\alpha\,\partial_\mu \bar{c}^R\,[A^R_\mu, c^R] \bigg),
\end{aligned} \tag{8}$$

где константа $c_2$ определяется равенством

$$c_2\,\delta_{ab} = f_{acd} f_{bcd},$$

в котором $f_{abc}$ представляют собой структурные константы калибровочной группы.

### 3. Однопетлевая перенормировка и BRST-инвариантность эффективного действия

После сложения контрчленов, соответствующих выражению (8), с классическим действием (1) перенормированное действие может быть записано в виде

$$\begin{gathered}S_{\text{ren}} = S + \Delta S = \frac{1}{e_0^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\bigg(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^2 + \alpha_0 B^2 - \\ - 2\partial_\mu B\,A^\mu - i\alpha_0 B\{c\,\bar c\} - 2i\partial_\mu \bar c\,\mathcal{D}^\mu c + \alpha_0 c^2 \bar c^2 - \qquad (9)\\ - m_0^2(A_\mu^2 - 2i\alpha_0 c\bar c)\bigg),\end{gathered}$$

где

$$\begin{aligned}\frac{1}{e_0^2} &= \frac{1}{e^2} + \frac{1}{8\pi^2}c_2\,\frac{11}{3}\ln\frac{M}{\mu} + O(e^2);\\ m_0 &= m - \frac{e^2}{8\pi^2}c_2\ln\frac{M}{\mu}\,m\left(\frac{\alpha}{8} + \frac{35}{24}\right) + O(e^4); \qquad (10)\\ \alpha_0 &= \alpha + \frac{e^2}{8\pi^2}c_2\ln\frac{M}{\mu}\left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{13\alpha}{6}\right) + O(e^4),\end{aligned}$$

а перенормированные поля определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}A_\mu^R &= \left[1 - \frac{e_0^2}{8\pi^2}c_2\ln\frac{M}{\mu}\,\frac{(\alpha_0-3)}{4} + O(e_0^4)\right]A_\mu;\\ \bar c^R\cdot c^R &= \left[1 - \frac{e_0^2}{8\pi^2}c_2\ln\frac{M}{\mu}\left(\frac{\alpha_0}{4} - \frac{35}{12}\right) + O(e_0^4)\right]\bar c\cdot c;\\ B^R &= \left[1 + \frac{e_0^2}{8\pi^2}c_2\,\frac{35}{12}\ln\frac{M}{\mu} + O(e_0^4)\right]B. \qquad (11)\end{aligned}$$

Поскольку перенормированное действие (9) имеет точно такую же структуру, что и исходное действие (1), оно является инвариантным относительно перенормированных BRST-преобразований (2) и антиBRST-преобразований (3).

### Заключение

В данной работе мы вычислили расходящуюся часть однопетлевого эффективного действия для теории Янга–Миллса с BRST-инвариантным массовым слагаемым. При этом использовался метод вычислений, исходно предложенный т'Хофтом и Вельтманом [15] и обобщенный впоследствии на более сложные случаи в работе [16]. Рассмотренная теория оказалась перенормируемой и обладающей BRST-инвариантностью на квантовом уровне. При этом перенормированная масса и перенормированный параметр калибровки $\alpha$ совпали с результатами, полученными при помощи вычисления диаграмм Фейнмана в работе [13], с точностью до обозначений. Следовательно, проведенное вычисление подтверждает справедливость результатов [13, 14], а также правильность достаточно сложных алгоритмов, построенных в [16].

### Приложение

Вторая вариация действия (1) (см. формулу (5)) с точностью до несущественной постоянной может быть записана в виде

$$D_i{}^j = \begin{pmatrix} d_{AA} & d_{Ac} & d_{A\bar c}\\ d_{cA} & d_{cc} & d_{c\bar c}\\ d_{\bar c A} & d_{\bar c c} & d_{\bar c\bar c}\end{pmatrix}, \qquad (12)$$

где

$$\begin{aligned}d_{AA} &= \left(\mathcal{D}_\alpha^2 + m^2\right)\eta^{\mu\nu} - \mathcal{D}^\nu\mathcal{D}^\mu - \frac{1}{\alpha}\partial^\mu\partial^\nu + \mathbf{F}^{\mu\nu};\\ d_{Ac} &= \frac{i}{2}\bar{\mathbf{c}}\,\partial^\mu - \frac{i}{2}(\partial^\mu\bar{\mathbf{c}});\\ d_{A\bar c} &= -\frac{i}{2}\mathbf{c}\,\partial^\mu + \frac{i}{2}(\partial^\mu\mathbf{c});\\ d_{cA} &= -\frac{i}{2}\bar{\mathbf{c}}\,\partial^\nu - i(\partial^\nu\bar{\mathbf{c}});\\ d_{cc} &= \frac{\alpha}{4}\bar{\mathbf{c}}^2; \qquad (13)\\ d_{c\bar c} &= i\mathcal{D}_\alpha\partial^\alpha - \frac{i\alpha}{2}\mathbf{B} - i\alpha m^2 - \frac{\alpha}{4}\bar{\mathbf{c}}\mathbf{c} - \frac{\alpha}{2}\mathbf{c}\bar{\mathbf{c}};\\ d_{\bar c A} &= \frac{i}{2}\mathbf{c}\,\partial^\nu + i(\partial^\nu\mathbf{c});\\ d_{\bar c c} &= -i\partial_\alpha\mathcal{D}^\alpha - \frac{i\alpha}{2}\mathbf{B} + i\alpha m^2 - \frac{\alpha}{4}\mathbf{c}\bar{\mathbf{c}} - \frac{\alpha}{2}\bar{\mathbf{c}}\mathbf{c};\\ d_{\bar c\bar c} &= \frac{\alpha}{4}\mathbf{c}^2.\end{aligned}$$

При этом были использованы следующие обозначения:

$$\mathbf{B} \equiv -ieB^aT^a, \quad (T^a)_{bc} = -if_{abc}, \quad \text{и т. д.}$$

Коэффициенты при вторых, первых производных и членах без производных в формуле (12) определяют матрицы $K$, $S$ и $W$ соответственно (см. общее определение (6)).

### Литература


1. *Хуанг К.* Кварки, лептоны и калибровочные поля. М., 1985.
2. *Славнов А., Фаддеев Л.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М., 1988.
3. *Curci G., Ferrari R.* // Nuovo. Cim. 1976. **A32**. P. 151.
4. *Curci G., Ferrari R.* // Nuovo. Cim. 1976. **A35**. P. 1; P. 273; 1978. **A47**. P. 555.
5. *Kondo K.* // Phys.Lett. 2001. **B514**. P. 335.
6. *Ojima I.* // Z. Phys. 1982. **C13**. P. 173.
7. *Baulieu L.* // Phys. Rept. 1985. **13**. P. 1.
8. *Delbourgo R., Twisk S., Thompson G.* // Int. J. Mod. Phys. 1988. **A3**. P. 435.
9. *Hurth T.* // Helv. Phys. Acta. 1997. **70**. P. 406.
10. *de Boer J., Skenderis K., van Neuwenhuizen P., Waldron A.* // Phys. Lett. 1996. **B367**. P. 175.
11. *Delduc F., Sorella S.P.* // Phys. Lett. 1989. **B231**. P. 408.
12. *Blasi A., Maggiore N.* // Mod. Phys. Lett. 1996. **A11**. P. 1665.
13. *Kondo K.* // Phys. Rev. 2002. **D65**. P. 085034.
14. *Gracey J.A.* // Phys. Lett. 2002. **B525**. P. 89.
15. *t'Hooft G., Veltman M.* // Ann. Inst. Henri Poincare. 1974. **20**. P. 69.
16. *Pronin P., Stepanyantz K.* // Nucl. Phys. 1997. **B485**. P. 517.


Поступила в редакцию
28.10.01