УДК 539.12.01

ДЕЙСТВИЕ, НАРУШАЮЩЕЕ ЧЕТНОСТЬ, В $SU(2) \times U(1)$ КАЛИБРОВОЧНОЙ МОДЕЛИ ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

В. Ч. Жуковский, А. С. Разумовский, К. В. Жуковский, А. М. Федотов

(*кафедра теоретической физики, кафедра оптики и спектроскопии*)

E-mail: th180@phys.msu.su

В настоящей работе вычисляется та часть эффективного действия, которая приводит к нарушению четности в конечнотемпературной $(2+1)$-мерной квантовой теории поля с массивными фермионами на фоне суперпозиции абелевых и неабелевых калибровочных полей.

Введение

В пространствах нечетной размерности к действию материи и калибровочных полей максвелловского или янг-миллсовского типа исходно добавляется (или получается вследствие фермионных флуктуаций) слагаемое, известное как топологический член Черна–Саймонса S_{cs} [1]. За последние годы были изучены различные эффекты в нечетномерных теориях с учетом воздействия внешних условий (см., напр., исследования поляризационного оператора фотона и массового оператора электрона в $(2+1)$-мерной квантовой электродинамике в магнитном поле и при конечных температуре и плотности [2–4]). Фундаментальным свойством действия калибровочного поля в таких теориях является его неинвариантность относительно так называемых «больших» (гомотопически нетривиальных) калибровочных преобразований. Поэтому для того чтобы выражение $\exp(iS_{cs})$ принимало единственное значение, необходимо наложить условие квантования на коэффициент в члене Черна–Саймонса (топологическую массу). С учетом этого требования коэффициент квантуется в единицах $g^2/(4\pi)$, что приводит к восстановлению инвариантности теории относительно больших калибровочных преобразований в целом. Все вышесказанное справедливо только для бестемпературной квантовой теории поля. Ситуация изменяется коренным образом, как только температура становится конечной. Это связано с тем, что разложение по теории возмущений приводит к неквантованным, зависящим от температуры поправкам в коэффициенте Черна–Саймонса [5–7], и, на первый взгляд, задача восстановления большой калибровочной инвариантности может показаться неразрешимой. Однако в ряде последних работ [8–10] показано, что хотя пертурбативные разложения и приводят к температурной зависимости коэффициента Черна–Саймонса, тем не менее полное эффективное действие восстанавливает свою калибровочную инвариантность.

Поскольку массовый член Черна–Саймонса приобретает радиационные поправки на более высоких порядках разложения, то структура эффективной теории должна модифицироваться для сохранения инвариантности относительно этих больших калибровочных преобразований. Такая задача восстановления инвариантности является весьма нетривиальной и может быть решена лишь в некоторых предельных случаях, например в статическом пределе $(\mathbf{p} \to 0,\ p_0 = 0)$ [11]. Оказывается, что в таком случае лидирующий порядок калибровочно инвариантного нарушающего четность эффективного действия, полученного в однопетлевом приближении, в точности совпадает с выражением для однопетлевого нарушающего четность действия, полученного в специальной калибровке фоновых полей $A_0 = A_0(t)$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$. Более того, основываясь на знании этого однопетлевого выражения, а также пользуясь «большим» калибровочным тождеством Уорда [12], можно восстановить лидирующие порядки нарушающего четность эффективного действия в любом петлевом приближении [10].

Именно в этом смысле вычисление такого однопетлевого эффективного действия в вышеупомянутой специальной калибровке фоновых полей представляет особый интерес как для случая абелевых, так и неабелевых полей [9].

В настоящей работе мы получим точное выражение для той части эффективного действия, которая приводит к нарушению четности, когда в качестве конфигурации калибровочных фоновых полей взята комбинация абелевых и неабелевых полей, а также проведем анализ полученных результатов.

1. Постановка задачи

Часть действия, нарушающую четность, можно записать в виде

$$\Gamma_{odd}(A, M) = \frac{1}{2}(\Gamma(A, M) - \Gamma(A, -M)), \qquad (1)$$

где эффективное действие $\Gamma(A, M)$ связано с действием массивных фермионов $S_F(A, M)$ стандартным соотношением

$$\exp(-\Gamma(A, M)) = \int D\psi D\overline{\psi} \exp(-S_F(A, M)).$$

В качестве фоновых калибровочных полей будем рассматривать комбинацию постоянных абелевых ($U(1)$) и неабелевых ($SU(2)$) полей: $A_\mu = gA_\mu^{(1)a}T_a + eA_\mu^{(2)}I$. Здесь T_a — генераторы группы $SU(2)$, а I — единичная матрица в цветовом пространстве. Кроме того, будем пользоваться следующей алгеброй γ-матриц

$$\gamma^3 = \sigma^3, \ \ \gamma^1 = i\sigma^1, \ \ \gamma^2 = i\sigma^2, \ \ \gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha}\gamma_\alpha.$$

Индекс 3 относится к евклидовой временной координате τ. Выражение (1) не может быть вычислено точно для случая произвольных полей A, поэтому будем решать эту задачу в специальной калибровке, о который уже упоминалось выше

$$\begin{aligned} &A_3^{(1),a} = |A_3^{(1)}(\tau)|n^a, \ \ A_3^{(2)} = A_3^{(2)}(\tau), \\ &A_j^{(1)} = A_j^{(1)}(\mathbf{x}), \ \ A_j^{(2)} = A_j^{(2)}(\mathbf{x}) \quad (j=1,2). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь n^a — фиксированный единичный вектор в цветовом пространстве ($n^a n^a = 1$) и, кроме прочего, потребуем, чтобы

$$[A_j, A_3] = 0, \quad [A_j, n] = 0. \tag{3}$$

Тогда евклидово действие для массивных фермионов на фоне калибровочного поля (2) в пространстве размерности (2+1) при конечной температуре может быть записано в виде

$$S_F(A,M) = \int_0^\beta d\tau \int d^2x\, \overline{\psi}(\gamma\partial + i\gamma A + M)\psi, \tag{4}$$

где $\gamma\partial = \gamma^\mu\partial_\mu$, $\gamma A = \gamma^\mu A_\mu$, а $\beta = 1/T$. Фермионные и калибровочные поля, фигурирующие в выражении (4), удовлетворяют антипериодическим и периодическим условиям соответственно

$$\psi(\beta,\mathbf{x}) = -\psi(0,\mathbf{x}), \ \ \overline{\psi}(\beta,\mathbf{x}) = -\overline{\psi}(0,\mathbf{x}),$$
$$A_\mu(\beta,\mathbf{x}) = A_\mu(0,\mathbf{x}).$$

2. Действие, нарушающее четность

Запишем фермионный детерминант в следующем виде

$$\begin{aligned} &\det(\gamma\partial + i\gamma A + M) = \textstyle\int D\psi D\overline{\psi} \times \\ &\times \exp\Big\{ -\int_0^\beta d\tau \int d^2x\, \overline{\psi}(\gamma\partial + i\gamma A + M)\psi \Big\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Затем проведем калибровочное преобразование фермионных полей

$$\psi(\tau,\mathbf{x}) = \exp\{-i(g\Omega^{(1)}(\tau)n + e\Omega^{(2)}(\tau)I)\}\psi'(\tau,\mathbf{x}),$$
$$\overline{\psi}(\tau,\mathbf{x}) = \overline{\psi}'(\tau,\mathbf{x}) \exp\{i(g\Omega^{(1)}(\tau)n + e\Omega^{(2)}(\tau)I)\}.$$

Поскольку в рассматриваемой конфигурации полей зависящими от τ являются только третьи компоненты A_3, а A_j — нет, а также в силу условия (3), подобного рода преобразование не коснется пространственных компонент потенциала, а зависимость от времени третьей компоненты может быть исключена, если выбрать $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ в виде

$$\Omega^{(1)}(\tau) = -\int_0^\tau d\tau' A_3^{(1,n)}(\tau') + \left(\frac{1}{\beta}\int_0^\beta d\tau' A_3^{(1,n)}(\tau')\right)\tau,$$

$$\Omega^{(2)}(\tau) = -\int_0^\tau d\tau' A_3^{(2)}(\tau') + \left(\frac{1}{\beta}\int_0^\beta d\tau' A_3^{(2)}(\tau')\right)\tau.$$

Таким образом, фермионный детерминант (5) примет вид

$$\det(\gamma\partial + i\gamma A + M) = \int D\psi D\overline{\psi} \exp\{-S_F(A_j, \widetilde{A}_3, M)\}, \tag{6}$$

где действие

$$\begin{aligned} &S_F(A_j, \widetilde{A}_3, M) = \\ &= \int_0^\beta d\tau \int d^2x\, \overline{\psi}\{\gamma\partial + i(\gamma_j A_j + \gamma_3\widetilde{A}_3) + M\}\psi, \end{aligned} \tag{7}$$

и $\widetilde{A}_3 = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta d\tau[gA_3^{(1)}(\tau)n + eA_3^{(2)}(\tau)I]$ является уже величиной постоянной. Для вычисления детерминанта (6)–(7) произведем Фурье-разложение фермионных полей

$$\psi(\tau,\mathbf{x}) = \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{i\omega_n\tau}\psi_n(\mathbf{x}), \ \overline{\psi}(\tau,\mathbf{x}) = $$
$$= \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-i\omega_n\tau}\overline{\psi}_n(\mathbf{x})$$

и запишем теперь действие как

$$\begin{aligned} &S_F(A_j, \widetilde{A}_3, M) = \\ &= \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\int d^2x\, \overline{\psi}(\mathbf{x})_n\{\gamma d + i\gamma_3(\omega_n + \widetilde{A}_3) + M\}\psi_n(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Здесь мы ввели следующее обозначение для оператора дифференцирования $\gamma d = \gamma_j(\partial_j + iA_j)$, а $\omega_n = \pi(2n+1)/\beta$ — мацубаровские частоты для фермионов. Итак, учитывая, что фермионная мера перепишется теперь в виде

$$D\psi(\tau,x)D\overline{\psi}(\tau,x) = \prod_{n=-\infty}^{n=+\infty} D\psi_n(\mathbf{x})D\overline{\psi}_n(\mathbf{x}),$$

для детерминанта будем иметь

$$\det(\gamma\partial + i\gamma A + M) = \prod_{n=-\infty}^{n=+\infty}\det\{\gamma d + M + i\gamma_3(\omega_n + \widetilde{A}_3)\},$$

где фигурирующий под знаком произведения детерминант может быть записан в виде

$$\int D\chi_n D\overline{\chi}_n \exp\left\{-\int d^2x\, \overline{\chi}_n(\mathbf{x})(\gamma d + \rho_n e^{i\gamma_3\phi_n})\chi_n(\mathbf{x})\right\}. \tag{8}$$

Здесь мы воспользовались непосредственно формулой Эйлера с обозначениями $\rho_n = \sqrt{M^2 + (\omega_n + \widetilde{A}_3)^2}$ и $\phi_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_n + \widetilde{A}_3}{M}\right)$. Для того чтобы рассчитать детерминант (8), применим известный метод вычисления аномального якобиана Фуджикавы [13]. Для этого вначале проведем следующее преобразование для спиноров χ (киральное вращение в пространстве $(1+1)$)

$$\chi_n(x) = e^{-i\frac{\phi_n}{2}\gamma_3}\chi'_n(x),\ \overline{\chi}_n(x) = \overline{\chi}'_n(x)e^{i\frac{\phi_n}{2}\gamma_3}.$$

В этом случае нетрудно убедиться, что выражение (8) примет вид

$$\det\{\gamma d + M + i\gamma_3(\omega_n + \widetilde{A}_3)\} = J_n \det[\gamma d + \rho_n], \quad (9)$$

где

$$J_n = \exp\left\{-\frac{i}{4\pi}\operatorname{tr}\left(\phi_n \int d^2x\epsilon_{ij}\left(F_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2}F_{ij}^{(2)}\right)\right)\right\}.$$

В этом выражении $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ — тензоры неабелевого и абелевого полей соответственно. Последний множитель в (9) не зависит явно от знака фермионной массы и поэтому не будет давать вклада в нарушающую четность часть эффективного действия, поэтому мы сразу можем записать выражение для Γ_{odd}

$$\Gamma_{odd} = \frac{i}{4\pi}\operatorname{tr}\left(\left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\phi_n\right)\int d^2x\epsilon_{ij}\left(F_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2}F_{ij}^{(2)}\right)\right). \quad (10)$$

Далее, поскольку само поле ϕ_n должно раскладываться по направлениям в цветовом пространстве $\phi_n = \phi_n^0 I + \phi_n^a T_a$, то, зная его явный вид, нетрудно получить выражения для каждой его цветовой компоненты

$$\phi_n^0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2M(\omega_n + e\widetilde{A}_3^{(2)})}{M^2 + \frac{g^2}{4}|\widetilde{A}_3^{(1)}|^2 - (\omega_n + e\widetilde{A}_3^{(2)})^2}\right),$$

$$\phi_n^a = \operatorname{arctg}\left(\frac{gM|\widetilde{A}_3^{(1)}|}{M^2 - \frac{g^2}{4}|\widetilde{A}_3^{(1)}|^2 + (\omega_n + e\widetilde{A}_3^{(2)})^2}\right)n^a.$$

Здесь следует обратить внимание на тот факт, что в отличие от случая чисто неабелевого поля, в данной комбинации абелевого и неабелевого полей вклад в Γ_{odd} будет давать не только цветовая составляющая поля ϕ_n^a, но также и ϕ_n^0. Это связано с наличием тензора абелевого поля $F^{(2)}$ в подинтегральном выражении в (10). Иными словами, само выражение под знаком tr в (10) может быть переписано как

$$\int d^2x\epsilon_{ij}\left(\left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\phi_n^a\right)F_{ij}^{(1)a} + \left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\phi_n^0\right)\frac{1}{2}F_{ij}^{(2)}\right). \quad (11)$$

Остановимся более подробно на вычислении одной из сумм, входящих в (11), к примеру $\sum\phi_n^a$. Для этого вначале введем следующие обозначения $m \equiv \beta M$, $x \equiv \frac{g}{2}\beta|\widetilde{A}_3^{(1)}|$ и $y \equiv e\beta|\widetilde{A}_3^{(2)}|$. Тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\phi_n^a = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{2mx}{m^2 - x^2 + ((2n+1)\pi + y)^2}\right).$$

Далее воспользуемся тем, что это выражение можно переписать в эквивалентной форме [9]

$$\sum(x,y,m) = \int_0^x du\frac{\partial\Sigma}{\partial u}(u,y,m),$$

где

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial u}(u,y,m) = \\ = 2m\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{m^2 + u^2 + ((2n+1)\pi + y)^2}{[m^2 + ((2n+1)\pi + y)^2 - u^2]^2 + 4m^2u^2}.$$

В свою очередь последнее выражение в точности равно

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial u}(u,y,m) = \\ = -\frac{m}{2\pi i}\oint_C dz\operatorname{th}\left(\frac{z}{2}\right)\frac{m^2 + u^2 + (y - iz)^2}{[m^2 + (y - iz)^2 - u^2]^2 + 4m^2u^2}, \quad (12)$$

где контур C таков, что охватывает все полюса $\operatorname{th}\left(\frac{z}{2}\right)$, т. е. точки $z = i(2n+1)\pi$. Далее необходимо заменить контур C на эквивалентную сумму $C_1 + C_2$ двух других контуров, которые вместе будут теперь влючать в себя только четыре особые точки дроби. В таком случае, суммируя вычеты во всех этих точках, получаем искомое выражение (12)

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial u}(u,y,m) = \\ = \frac{\operatorname{sh}(m)}{4}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}(m) + \cos(u-y)} + \frac{1}{\operatorname{ch}(m) + \cos(u+y)}\right]$$

и тем самым, после интегрирования по u [14], само выражение для суммы $\sum\phi_n^a$ принимает вид

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\phi_n^a = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\left(\frac{m}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right) + \\ + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\left(\frac{m}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right).$$

Очевидно, что аналогично может быть рассчитана и сумма $\sum\phi_n^0$. Объединяя их, выпишем сразу тот вид, который окончательно примет выражение (10)

$$\Gamma_{\rm odd} = \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)}, \quad (13)$$

где

$$\Gamma^{(1)} = \frac{ig}{8\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\left(\frac{\beta M}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\frac{g\beta}{2}|\widetilde{A}_3^{(1)}| - e\beta|\widetilde{A}_3^{(2)}|}{2}\right)\right) + \\ + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\left(\frac{\beta M}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\frac{g\beta}{2}|\widetilde{A}_3^{(1)}| + e\beta|\widetilde{A}_3^{(2)}|}{2}\right)\right)\right] \times$$

$$\times n^a \int d^2\, x \epsilon_{ij} F_{ij}^{(1)a}, \qquad (14)$$

$$\Gamma^{(2)} = \frac{ie}{8\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\left(\frac{\beta M}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{e\beta|\widetilde{A}_3^{(2)}| - \frac{g\beta}{2}|\widetilde{A}_3^{(1)}|}{2}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\left(\frac{\beta M}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\frac{g\beta}{2}|\widetilde{A}_3^{(1)}| + e\beta|\widetilde{A}_3^{(2)}|}{2}\right)\right)\right] \times$$
$$\times \int d^2 x\, \epsilon_{ij} F_{ij}^{(2)}. \qquad (15)$$

Нетрудно непосредственно убедиться в том, что полученное выражение в пределе равенства нулю одного из полей (либо абелевого, либо неабелевого) в точности воспроизводит ранее полученные результаты [9]. Легко также видеть, что в пределе нулевой температуры нарушающая четность часть действия (13), (14), (15) переходит в полусумму членов Черна–Саймонса абелевого и неабелевого полей, каждый из которых воспроизводит известные результаты для бестемпературной квантовой теории поля [15, 16]

$$\Gamma_{odd}|_{T=0} = \frac{1}{2}\frac{M}{|M|}[S_{CS}^{(1)} + S_{CS}^{(2)}],$$

где в нашем случае

$$S_{CS}^{(1)} = \frac{ig^2}{4\pi}\operatorname{tr}\int d^3x\, A_3^{(1)}\epsilon_{ij}F_{ij}^{(1)},$$
$$S_{CS}^{(2)} = \frac{ie^2}{4\pi}\int d^3x\, A_3^{(2)}\epsilon_{ij}F_{ij}^{(2)}.$$

Заключение

Таким образом, в настоящей статье получено точное выражение для той части конечнотемпературного эффективного действия в пространстве размерности $(2+1)$, которая индуцируется массивными фермионами, находящимися на фоне одновременно как абелевых, так и неабелевых калибровочных полей в специальной конфигурации, и которая приводит к нарушению четности. Под специальной понимается такая конфигурация, в которой обеспечивается равенство нулю электрических и независимость от времени магнитных полей. Полученный нами общий результат в случае равенства нулю одного из типов калибровочных полей в точности воспроизводит ранее полученные результаты для абелевого (неабелевого) поля [9], то же самое справедливо и для предельного результата, получающегося при переходе к нулевой температуре [15, 16].

Литература

1. *Deser S., Jackiw R., Tempelton S.* // Phys. Rev. Lett. 1982. **48**. P. 975.; Ann. Phys. 1982. **140**. P. 372.
2. *Zhukovskii K.V., Eminov P.A.* // Phys. Lett. 1995. **B359**. P. 155; Изв. вузов. Физика. 1995. **5**. С. 61; Ядерная физика. 1996. **59**. С. 1265; «Problems of Fundamental Physics». Proceedings of the 7th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics (24–30 August 1995, Moscow, Russia). M., 1997.
3. *Тернов И.М., Борисов А.В., Жуковский К.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. №1. С. 71 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 1. P. 99).
4. *Вшивцев А.С., Жуковский В.Ч., Эминов П.А., Борисов А.В.* Эффекты внешнего поля и среды в неабелевой калибровочной теории. М., 2001.
5. *Babu K. S., Das A., Panigrahi P.* // Phys. Rev. 1987. **D36**. P. 3725.
6. *Bralic N., Fosco C., Schaposnik F.* // Phys. Lett. 1996. **B383**. P. 199.
7. *Cabra D., Fradkin E., Rossini G., Schaposnik F.* // Phys. Lett. 1996. **B383**. P. 434.
8. *Dunne G., Lee K., Lu Ch.* // Phys. Rev. Lett. 1997. **78**. P. 3434.
9. *Fosco C., Rossini G., Schaposnik F.* // Phys. Rev. 1997. **D56**. P. 6547.
10. *Brandt F., Das A., Frenkel J., Rao K.* // Phys. Lett. 2000. **B492**. P. 393.
11. *Brandt F., Das A., Frenkel J.* // Phys. Rev. 2000. **D62**. P. 085012.
12. *Das A., Dunne G., Frenkel J.* // Phys. Lett. 2000. **B472**. P. 332.
13. *Fujikawa K.* // Phys. Rev. Lett. 1979. **42**. P. 1195; Phys. Rev. 1980. **D21**. P. 2848.
14. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М., 1981.
15. *Redlich A.N.* // Phys. Rev. 1984. **D29**. P. 2366.
16. *Niemi A.J., Semenoff G.W.* // Phys. Rev. Lett. 1983. **51**. P. 2077.

Поступила в редакцию
11.11.02