

в свою очередь приводит к тому, что при одинаковых скоростях жидкости на объем воды с суспензией действует большая центробежная сила. Результатом этого процесса является то, что размеры вихреобразования в суспензии больше, чем в чистой воде.

Проделанный корреляционный и спектральный анализ хорошо показывает вертикальную структуру жидкости, в которой турбулентность создается колеблющейся решеткой. Наличие в такой жидкости суспензии приводит к тому, что часть турбулентной энергии расходуется на поддержание твердых частиц суспензии во взвешенном состоянии, т. е. практически поглощается частицами суспензии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 00-05-64339).

Литература

1. Пыркин Ю.Г., Петров В.П., Иванова И.Н., Силаев М.А. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2001. **37**, № 5. С. 730.
2. Пыркин Ю.Г., Петров В.П., Иванова И.Н., Силаев М.А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2002. № 6. С. 78.
3. Villermaux E., Sommeria J., Hopfinger E.J. // Fluid Mech. 1991. **10**, No. 4. P. 427.
4. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. М., 1971.
5. Медников Е.П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М., 1981.
6. Hwang P.A. // J. Hydraulic Eng. 1985. **111**, No. 3. P. 85.
7. Гринвальд Д.И. Турбулентность русловых потоков. Ленинград, 1974.

Поступила в редакцию
29.11.02

УДК 550.831(26); 528.563(26); 550.831.23

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩАЮЩИХ УСКОРЕНИЙ ОПОРЫ ПРИ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ НА МОРЕ

В. Л. Пантелеев, З. Н. Левицкая, Т. С. Чеснокова, А. В. Логинов

(ГАИШ)

E-mail: pant@sai.msu.ru

Работа является продолжением серии статей, посвященных численному моделированию измерения удельной силы тяжести в движении. Получены математические алгоритмы для построения моделей случайных процессов, включающих в себя смещение, скорость смещения и ускорение опоры, обусловленные качкой корабля.

Качка корабля, в условиях которой приходится выполнять определения силы тяжести, является случайным процессом. Выбор того или иного алгоритма обработки наблюдений зависит от свойств этого случайного процесса. Например, является ли случайный процесс стационарным или нет, следует вывод о пригодности или не пригодности применения разработанного теоретиками метода фильтрации нижних частот (фильтр Винера или алгоритм Калмана). В случае стационарности случайного процесса удается построить оптимальный алгоритм, существующий в реальном времени [1]. За критерий оптимальности принят минимум средней квадратической погрешности при фильтрации удельной силы тяжести. Однако если допустить запаздывание во времени, то точность значительно возрастает [2]. Как известно, обработка случайных процессов связана либо с фильтрацией, либо с прогнозом, либо со сглаживанием. Задача измерения какой-либо группы гармоник безотносительно ко времени стоит несколько особняком от выше перечисленных. Именно с ней сталкиваются специалисты, работающие в области измерения силы тяжести на подвижном основании.

Ситуация осложняется и тем, что опора совершает не только поступательные движения, но и вращательные. Кроме того, возмущающие ускорения, даже если они и не содержат очень низких частот (0.05 с^{-1} и ниже), возникают из-за нелинейности измерительных устройств. Эти возмущающие ускорения нельзя отфильтровать, не искажая «полезный сигнал» — изменение силы тяжести. Отсюда возникает необходимость моделирования таких ускорений с тем, чтобы из выходного сигнала гравиметра их удалить.

Моделирование возмущающих ускорений прежде всего необходимо для построения алгоритмов фильтрации силы тяжести на фоне инерциальных помех, какие создает вертикальная компонента ускорения, превышающая изменение полезного сигнала в десятки тысяч раз. Основным свойством алгоритма фильтрации нижних частот является заграждение гармоник с частотой, превышающей некоторое значение ω_0 , называемое частотой среза, но при этом все гармоники с меньшей частотой должны проходить через фильтр нижних частот без искажения. Строго говоря, таких алгоритмов не существует.

вует. Кроме того, обработка информации должна быть выполнена на конечном интервале времени, что создает дополнительные трудности. В связи с этим возникает задача нахождения компромиссного решения, которое позволило бы выполнить задачу фильтрации с допустимыми погрешностями как в диапазоне частот инерциальных помех, так и «полезного сигнала». Такие алгоритмы называют оптимальными. Строго оптимальные алгоритмы фильтрации на практике осуществить нельзя, так как для их построения требуется знать свойства как полезного сигнала, подлежащего фильтрации, так и инерциальных шумов. Минимизацию погрешности фильтрации проще и надежнее выполнить путем численного эксперимента, а для этого нам нужно построить алгоритм, преобразующий некоторую случайную последовательность в процесс с заданными спектральными характеристиками. Такие алгоритмы принято называть формирующими фильтрами.

Моделируемый случайный процесс должен обладать следующими очевидными свойствами.

1. Он должен быть стационарным, по крайней мере, в широком смысле. С этим тезисом, по-видимому, можно поспорить. Действительно, погода на море меняется. В течение нескольких часов спокойное море превращается в штормовое. Время, затраченное на обработку наблюдений, — несколько минут. Если разрешающая способность метода морской гравиметрии составляет 200 м, то при скорости 10 узлов судно пройдет это расстояние за 40 с. Можно ли считать за это время качку судна стационарным случайным процессом? По-видимому, да.

2. В следующие 40 с как состояние моря, так и сложность измеряемого сигнала может слегка измениться. Нуждаются ли параметры алгоритма фильтрации в коррекции, чтобы снова он был оптимальным? Да, если это существенно влияет на точность. Если же после исправления параметров точность изменится незначительно, то можно продолжать работать с фильтром, близким к оптимальному, и параметры алгоритма не менять. Очевидно, что никаких рекомендаций, выведенных теоретически, делать не следует, все решает практика.

3. Основными характеристиками стационарных процессов являются спектральная плотность и корреляционная функция. Спектральная плотность случайного процесса на выходе формирующего фильтра, записанного в виде линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, имеет вид отношения двух степенных полиномов от аргумента ω^2 . Эта функция четная. Автокорреляционная функция — также четная функция от аргумента, равного смещению по времени τ .

4. Особую роль в задачах фильтрации и сглаживания играет свойство дифференцируемости случайных процессов. Пусть $x(t)$ — случайный процесс, а его спектральная плотность равна $S_x(\omega)$. Интеграл

от этой функции в бесконечных пределах имеет конечное значение, равное дисперсии случайного процесса. Если этот процесс дифференцируем, то должен существовать интеграл и от функции $\omega^2 S_x(\omega)$. Для моделирования ускорения необходимо, чтобы исходный случайный процесс был дифференцируем дважды. Зададим следующий вид для спектральной плотности вертикального смещения основания:

$$S_x(\omega) = \frac{M_k(\omega^2)}{N_l(\omega^2)}. \quad (1)$$

Тогда дисперсия ускорения случайного процесса будет

$$\sigma_{\ddot{x}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^4 M_k(\omega^2)}{N_l(\omega^2)} d\omega. \quad (2)$$

Этот интеграл сходится, если $2k + 4 \leq 2l - 2$, т. е. $l \geq k + 3$. Отсюда следует, что для случая, когда числитель формулы (1) — константа, l должно быть равно 3. Следовательно, для моделирования случайного процесса с конечной дисперсией ускорения формирующий фильтр должен иметь порядок не меньше третьего.

Будем искать математическую модель формирующего фильтра в виде линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Пусть $x(t)$ — координата смещения опоры, а $q(t)$ — возбуждающая функция. В качестве формирующего фильтра возьмем уравнение третьего порядка

$$\ddot{x} + (2\alpha + \gamma)\dot{x} + (2\alpha\gamma + \alpha^2 + \beta^2)x + \gamma(\alpha^2 + \beta^2)x = \gamma(\alpha^2 + \beta^2)q(t), \quad (3)$$

которое имеет три простых корня характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = -\gamma, \quad \lambda_2 = -\alpha + i\beta, \quad \lambda_3 = -\alpha - i\beta.$$

В общем случае, когда уравнение может быть и более высокого порядка, на наш взгляд, удобнее пользоваться векторно-матричным способом представления решения уравнения формирующего фильтра.

Примем в качестве вектора состояния $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, ..., $\dot{x}_{n-1} = x_n$. Дифференциальное уравнение, связывающее последнюю компоненту вектора состояния с остальными, получим в таком виде:

$$\dot{x}_n = g_n q(t) - (g_n x_1 + g_{n-1} x_2 + g_{n-2} x_3 + \dots + g_1 x_n). \quad (4)$$

Теперь запишем систему дифференциальных уравнений в матричном виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{F}q(t), \quad (5)$$

где

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -g_n & -g_{n-1} & -g_{n-2} & -g_{n-3} & \dots & -g_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

Построим решение этого линейного уравнения. Как известно из теории дифференциальных уравнений, оно имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \xi)\mathbf{F}q(\xi) d\xi, \quad (6)$$

где $\Phi(t, t_0)$ — фундаментальная матрица по терминологии В.П. Сигорского [3]. В нашем случае она определяется следующим образом:

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{H}\Lambda(t)\Lambda^{-1}(t_0)\mathbf{H}^{-1}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

— так называемая модальная матрица,

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \exp \lambda_1 t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp \lambda_2 t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \exp \lambda_3 t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \exp \lambda_n t \end{pmatrix} \quad (9)$$

— диагональная матрица.

Ограничимся системой третьего порядка, для которой

$$g_1 = 2\alpha + \gamma, \quad g_2 = \alpha^2 + 2\alpha\gamma + \beta^2, \quad g_3 = \gamma(\alpha^2 + \beta^2). \quad (10)$$

Опуская выкладки, запишем основной результат:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix} = \Phi(t - t_0) \begin{pmatrix} x(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) \end{pmatrix} + \gamma(\alpha^2 + \beta^2) \int_{t_0}^t \Phi(t - \xi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} q(\xi) d\xi. \quad (11)$$

Для компьютерного моделирования возмущающих ускорений необходимо задать возбуждающую функцию $q(t)$. Ее удобно взять в виде «белого шума». Однако на компьютере можно только пользоваться последовательностью независимых случайных чисел. Функция $q(t)$ задана в дискретные моменты времени $t = t_k$. Возможны варианты. Рассмотрим два из них:

1) внутри каждого интервала (t_k, t_{k+1}) эта функция сохраняет свое значение, а изменяется лишь

скачком в моменты t_k . В дальнейшем будем ее называть *ступенчатой*;

2) функция $q(t)$ представляет собой последовательность импульсов

$$q(t) = q(k)\delta(t - t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ее назовем *гребенчатой*, так как импульсы на оси времени образуют нечто вроде гребенки.

Однако остается неясным: насколько правильно нами выбраны параметры модели. Прежде всего это величина доминирующей частоты и дисперсия процесса ускорения или перемещения опоры. Мы получим ответ на этот вопрос, если для величин α, β, γ и σ зададим значения, отражающие действительность. Параметры α, β, γ и σ входят в автокорреляционную функцию моделируемого процесса, которую можно получить на практике, а следовательно, определить их.

Лучшим способом проверки правильности выбора параметров, на наш взгляд, является сравнение автокорреляционных функций смоделированного и реального процессов.

Поскольку в качестве формирующего фильтра взята динамическая система, имеющая линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами (уравнение (3)), а спектральная плотность процесса — дробно-рациональное выражение, то

$$K(\tau) = C_1 \exp(-\gamma|\tau|) + \exp(-\alpha|\tau|)[C_2 \sin \beta|\tau| + C_3 \cos \beta\tau], \quad (12)$$

где постоянные C_1, C_2 и C_3 должны быть выбраны так, чтобы процесс был дважды дифференцируем, а дисперсия его равна заданной величине σ^2 . Это величина дисперсии смещения опоры, которое производит возмущающее ускорение. Параметры α и γ определяют степень нерегулярности (случайности) качки корабля, а β — доминирующую частоту.

Спектральная плотность процесса, заданного автокорреляционной функцией (12), имеет вид

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{C_1 \gamma}{\omega^2 + \gamma^2} + \frac{C_2 \beta (\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2) + C_3 \alpha (\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)}{(\omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2))^2 + 4\alpha^2 \omega^2} \right]. \quad (13)$$

Минимум знаменателя во втором слагаемом формулы (13) достигается при $\omega \approx \beta$. Это означает, что при частоте ω , близкой к величине β , спектральная плотность будет максимальной, что и говорит о том, что β — доминирующая частота случайного процесса.

Для того чтобы выполнялось условие дифференцируемости, необходимо, чтобы коэффициент при четвертой степени аргумента ω в числителе формулы (13) после приведения ее к общему знаменателю был равен нулю. Аналогично приходим к выводу: для двукратной дифференцируемости необходимо, чтобы коэффициент при ω^2 был равен нулю. Таким

образом, для определения C_1, C_2 и C_3 получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2\gamma(\alpha^2 - \beta^2) & \beta(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) & \alpha(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ \gamma & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Ее решение:

$$C_1 = 2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) \frac{\sigma^2}{D}, \quad C_2 = \alpha\gamma(3\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2) \frac{\sigma^2}{D},$$

$$C_3 = \beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2 - 3\alpha^2) \frac{\sigma^2}{D},$$

где $D = \beta[2\alpha(\alpha^2 + \beta^2) + \gamma(\beta^2 + \gamma^2 - 3\alpha^2)]$.

Таким образом, автокорреляционная функция стационарного, двукратно дифференцируемого марковского процесса третьего порядка достаточно сложна:

$$K(\tau) = \frac{\sigma^2 \alpha \gamma}{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2) + \gamma(\beta^2 + \gamma^2 - 3\alpha^2)} \times \left\{ 2(\alpha^2 + \beta^2) \frac{\exp(-\gamma|\tau|)}{\gamma} + \exp(-\alpha|\tau|) \times \left[(3\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2) \frac{\sin \beta|\tau|}{\beta} + (\beta^2 + \gamma^2 - 3\alpha^2) \frac{\cos \beta|\tau|}{\alpha} \right] \right\}, \quad (15)$$

а спектральная плотность, соответствующая этому процессу, записывается в виде:

$$S(\omega) = \frac{Q}{\pi} \frac{(\alpha^2 + \beta^2) (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2}{(\omega^2 + \gamma^2)(\omega^4 + 2(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2)}, \quad (16)$$

где

$$Q = \frac{2\alpha\gamma\sigma^2}{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2) + \gamma(\beta^2 + \gamma^2 - 3\alpha^2)}.$$

Для моделирования случайного процесса, имитирующего вертикальные или горизонтальные колебания опоры на судах малого тоннажа в условиях плавания на шельфовой зоне Каспийского и Черного морей, мы предварительно приняли следующие значения параметров этих процессов: $\alpha = 0.2 \text{ с}^{-1}$, $\beta = 2 \text{ с}^{-1}$, $\gamma = 1 \text{ с}^{-1}$, $\sigma \approx 20 \text{ см}$. Среднее квадратическое значение ускорения, вызываемое этим смещением, получается около 65 гал. В случае изменения динамических характеристик судна или погодных условий эти параметры легко подправить. Обе модели «качки корабля» дали практически одинаковые результаты с параметрами, приведенными выше. На рис. 1 приведен пример смещения подвижной опоры в результате такой «качки». Рис. 2 демонстрирует соответствующий массив ускорений опоры. Автокорреляционные функции «качки корабля» для обеих

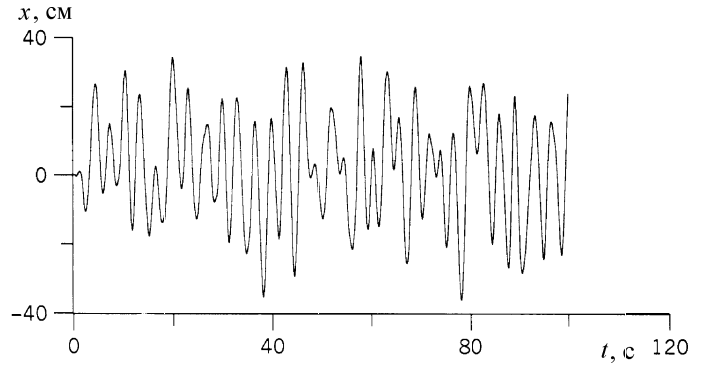


Рис. 1. Массив смещения опоры как результат «качки корабля»

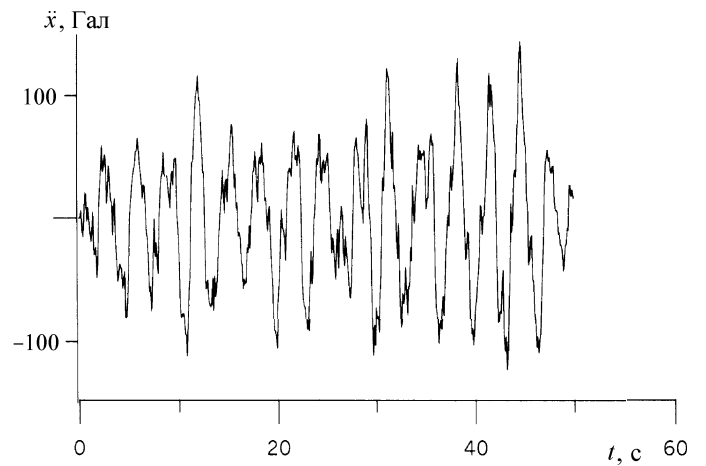


Рис. 2. Массив ускорений, вызванных «качкой корабля»

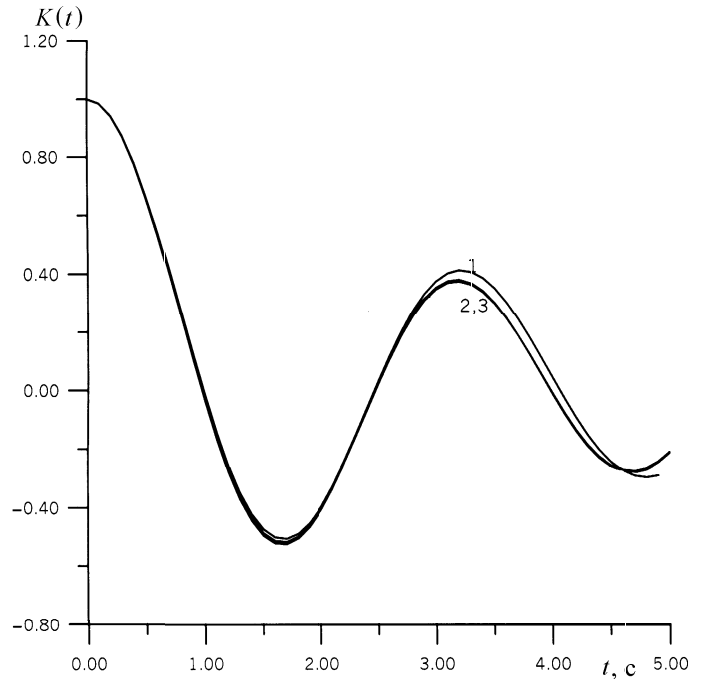


Рис. 3. Корреляционные функции массивов смещения опоры: (1) вычислена по формуле (15), (2) случай непрерывной ступенчатой возмущающей функции, (3) случай непрерывной гребенчатой возмущающей функции

моделей и автокорреляционная функция, вычисленная по формуле (15), приведены на рис. 3. Сходство этих функций можно считать вполне приемлемым.

Таким образом, нам удалось найти алгоритмы для построения моделей случайных процессов, включающих в себя смещение, скорость смещения и ускорение опоры, обусловленные «качкой корабля». Априорно задано, что случайные процессы являются марковскими до 3-го порядка включительно.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 01-05-64276).

Литература

1. *Свешников А.А.* Прикладные методы теории случайных функций. М., 1968.
2. *Волков А.С.* Возможности динамических систем с запаздыванием в морской гравиметрии // *Линейная фильтрация в задачах динамической гравиметрии.* М., 1985.
3. *Сигорский В.П.* Математический аппарат инженера. Киев, 1977.

Поступила в редакцию
11.12.02

УДК 551.509.33

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ ДО ИОНОСФЕРНЫХ ВЫСОТ

Р. Р. Ахмедов, В. Е. Куницын

(кафедра физики атмосферы)

E-mail: ravan@phys.msu.su

Разработаны численный алгоритм и программное обеспечение для решения системы одномерных нелинейных уравнений геофизической гидродинамики, которые описывают генерацию и распространение акустико-гравитационных волн, порождаемых землетрясениями и сильными взрывами, на большие высоты в атмосфере.

Введение

Исследование генерации и распространения акустико-гравитационных волн (АГВ) в земной атмосфере является одной из важных проблем современной физики атмосферы. Совершенствуются традиционные методы наблюдений за состоянием атмосферы, разрабатываются новые средства и методики измерений, улучшаются алгоритмы и программное обеспечение для численных расчетов, ставятся новые задачи для учета нелинейных эффектов при излучении и распространении АГВ.

Установлено, что источниками АГВ в атмосфере в основном являются следующие явления: землетрясения, извержения вулканов, ураганы, грозы, солнечные затмения, струйные течения, полярная и экваториальная токовые системы, метеоры, сильные взрывы, мощные стартующие ракеты [1, 2]. Эффективность различных механизмов генерации АГВ оценивается из решения соответствующих уравнений гидродинамики с включенными в них источниками массы, энергии и импульса. При исследовании возмущений в атмосфере, порождаемых поверхностными волнами Релея или волнением поверхности океана при землетрясениях и подземных взрывах, роль источников могут выполнять также заданные движения границы раздела [1]. Существует мнение, что перед сильными землетрясениями тоже генерируются АГВ [3].

Из-за экспоненциального спада плотности атмосферы в зависимости от высоты амплитуда АГВ может значительно возрасти в верхней атмосфере, где они могут оказать влияние на ионосферу, изменяя распределение нейтральных и заряженных частиц [4]. Современные методы исследования верхней атмосферы, такие, как радиотомографические и некогерентное рассеяние, позволяют зарегистрировать АГВ в ионосфере в больших пространственных областях [5].

Основная цель данной работы – построение численного метода для решения системы уравнений гидродинамики, описывающей распространение в атмосфере и ионосфере АГВ, которые генерируются землетрясениями и сильными взрывами. Так как существуют некоторые специфические трудности, связанные с численным решением этой задачи, здесь подробно исследованы решения такой системы вместе с начальными и граничными условиями в одномерном случае. Это позволило выбрать устойчивый и эффективный численный алгоритм для решения подобных задач в двух- и трехмерных случаях.

Система уравнений

При анализе условий распространения и генерации АГВ исходной является система уравнений