

моделей и автокорреляционная функция, вычисленная по формуле (15), приведены на рис. 3. Сходство этих функций можно считать вполне приемлемым.

Таким образом, нам удалось найти алгоритмы для построения моделей случайных процессов, включающих в себя смещение, скорость смещения и ускорение опоры, обусловленные «качкой корабля». Априорно задано, что случайные процессы являются марковскими до 3-го порядка включительно.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 01-05-64276).

#### Литература

1. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М., 1968.
2. Волков А.С. Возможности динамических систем с запаздыванием в морской гравиметрии // Линейная фильтрация в задачах динамической гравиметрии. М., 1985.
3. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. Киев, 1977.

Поступила в редакцию  
11.12.02

УДК 551.509.33

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ ДО ИОНОСФЕРНЫХ ВЫСОТ

**Р. Р. Ахмедов, В. Е. Куницын**

(кафедра физики атмосферы)

E-mail: ravan@phys.msu.su

**Разработаны численный алгоритм и программное обеспечение для решения системы одномерных нелинейных уравнений геофизической гидродинамики, которые описывают генерацию и распространение акустико-гравитационных волн, порождаемых землетрясениями и сильными взрывами, на большие высоты в атмосфере.**

#### Введение

Исследование генерации и распространения акустико-гравитационных волн (АГВ) в земной атмосфере является одной из важных проблем современной физики атмосферы. Совершенствуются традиционные методы наблюдений за состоянием атмосферы, разрабатываются новые средства и методики измерений, улучшаются алгоритмы и программное обеспечение для численных расчетов, ставятся новые задачи для учета нелинейных эффектов при излучении и распространении АГВ.

Установлено, что источниками АГВ в атмосфере в основном являются следующие явления: землетрясения, извержения вулканов, ураганы, грозы, солнечные затмения, струйные течения, полярная и экваториальная токовые системы, метеоры, сильные взрывы, мощные стартующие ракеты [1, 2]. Эффективность различных механизмов генерации АГВ оценивается из решения соответствующих уравнений гидродинамики с включенными в них источниками массы, энергии и импульса. При исследовании возмущений в атмосфере, порождаемых поверхностными волнами Релея или волнением поверхности океана при землетрясениях и подземных взрывах, роль источников могут выполнять также заданные движения границы раздела [1]. Существует мнение, что перед сильными землетрясениями тоже генерируются АГВ [3].

Из-за экспоненциального спада плотности атмосферы в зависимости от высоты амплитуда АГВ может значительно возрасти в верхней атмосфере, где они могут оказать влияние на ионосферу, изменяя распределение нейтральных и заряженных частиц [4]. Современные методы исследования верхней атмосферы, такие, как радиотомографические и некогерентное рассеяние, позволяют зарегистрировать АГВ в ионосфере в больших пространственных областях [5].

Основная цель данной работы – построение численного метода для решения системы уравнений гидродинамики, описывающей распространение в атмосфере и ионосфере АГВ, которые генерируются землетрясениями и сильными взрывами. Так как существуют некоторые специфические трудности, связанные с численным решением этой задачи, здесь подробно исследованы решения такой системы вместе с начальными и граничными условиями в одномерном случае. Это позволило выбрать устойчивый и эффективный численный алгоритм для решения подобных задач в двух- и трехмерных случаях.

#### Система уравнений

При анализе условий распространения и генерации АГВ исходной является система уравнений

сохранения в форме Эйлера [2, 6]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F}^d, \\ \rho \left( \frac{\partial (c_v T)}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) (c_v T) \right) = -p(\nabla, \mathbf{v}) + Q^d, \\ p = \frac{\rho}{m_0} RT. \end{cases} \quad (1)$$

Первое уравнение — это уравнение неразрывности, второе — уравнение сохранения количества движения, третье — уравнение сохранения энергии, и, наконец, последнее — это уравнение состояния идеального газа. Для рассматриваемых нами быстрых движений несущественна сила Кориолиса, поэтому мы пренебрегаем ею. Здесь  $\rho$  — плотность,  $T$  — температура,  $p$  — давление,  $\mathbf{v}$  — скорость движения частиц среды,  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения,  $\mathbf{F}^d$  — сила вязкости,  $Q^d$  — теплота поглощенная из-за диссипации волны,  $c_v$  — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме,  $m_0$  — относительная молекулярная масса воздуха,  $R$  — универсальная газовая постоянная.

Внутренние гравитационные волны — наиболее интенсивная часть спектра АГВ. Для этих волн ниже турбопаузы существенны следующие диссипативные механизмы: молекулярная вязкость, теплопроводность и взаимодействие с фоновой турбулентностью атмосферы [6]. Как показывают исследования, здесь молекулярная вязкость и теплопроводность не могут значительно влиять на импульс и энергию гравитационных волн, так как для затухания таких больших волновых движений им требуется время порядка нескольких дней. А нас интересуют процессы, которые протекают в течение нескольких часов. Поэтому будем учитывать в нашей модели только влияния турбулентной вязкости до высоты турбопаузы. Выше основную роль играет другой механизм — ионное торможение [6, 7]. Объединим две различные силы, вязкости и ионного торможения, в силу  $\mathbf{F}^d$ , которая взята нами в форме Релея [6]:  $\mathbf{F}^d = -\alpha \mathbf{v}$ . Здесь  $\alpha$  — коэффициент сопротивления, значение которого на разных высотах соответствует разным силам. Для простоты будем использовать среднее значение  $\alpha$ , которое меняется с высотой таким образом, чтобы отношение коэффициента сопротивления к плотности оставалось постоянным:  $\alpha/\rho = \text{const}$ . Из диссипативных механизмов на энергию волны в основном влияет теплопроводность [6]. Таким образом,  $Q^d = K \nabla^2 T$  в системе уравнений (1);  $K$  — коэффициент теплопроводности воздуха.

Каждый термодинамический параметр разложим на две части — фоновую стационарную часть, обозначенную индексом 0, и возмущенную, обозначенную штрихом:

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad T = T_0 + T', \quad p = p_0 + p'. \quad (2)$$

Для численного решения удобно привести уравнения (1) к безразмерному виду. Для этого нормируем физические величины следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \frac{\rho}{\rho_s}, & p &\rightarrow \frac{p}{p_s}, & T &\rightarrow \frac{T}{T_s}, & \mathbf{v} &\rightarrow \frac{\mathbf{v}}{c_s}, \\ \mathbf{r} &\rightarrow \frac{\mathbf{r}}{H}, & t &\rightarrow t \frac{c_s}{H}, & m_0 &\rightarrow \frac{m_0}{m_s}. \end{aligned} \quad (3)$$

Индекс  $s$  показывает значение соответствующего параметра на поверхности земли,  $H$  — высота однородной атмосферы (8400 м),  $c_s$  — скорость звука на поверхности земли (340 м/с). После преобразований (2) и (3) для одномерного случая получим систему гиперболических уравнений и уравнение состояния идеального газа:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} [(\rho_0 + \rho') w], \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -w \frac{\partial w}{\partial z} - A_1 \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial p'}{\partial z} - A_2 \frac{\rho'}{\rho_0 + \rho'} - A_3 w, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} = -w \frac{\partial (T_0 + T')}{\partial z} - A_4 \frac{\partial w}{\partial z} + A_5 \frac{\partial^2 (T_0 + T')}{\partial z^2}, \\ p' = (\rho_0 T' + \rho' T_0 + \rho' T') / m_0, \end{cases} \quad (4)$$

где ось  $z$  направлена вертикально вверх,  $w$  — вертикальная компонента скорости движения частиц атмосферы,  $A_1 = \frac{p_s}{\rho_s c_s^2}$ ,  $A_2 = \frac{H g_s}{c_s^2}$ ,  $A_3 = \frac{H \alpha}{\rho_s c_s^2}$ ,  $A_4 = \frac{R}{m_s c_v}$ ,  $A_5 = \frac{K}{c_s c_v \rho_s H}$  — безразмерные постоянные.

Для моделирования смещения твердой поверхности земли при неглубоких землетрясениях и взрывах можно взять функцию Гаусса. А ее производная по времени даст значения скорости:

$$w(0, t) = -\frac{2D_0}{\Delta t} \left( \frac{t - \bar{t}}{\Delta t} \right) \exp \left( -\left( \frac{t - \bar{t}}{\Delta t} \right)^2 \right). \quad (5)$$

Значения параметров  $D_0$  и  $\Delta t$ , характеризующие амплитуду и частоту возмущения, подробно обсуждаются в [8]. Скорость движения частиц воздуха на высоте поверхности земли равна скорости движения поверхности земли. Это граничное условие обеспечивает передачу возмущения от твердой среды в атмосферу.

### Численный метод

Методы решения моделирующих уравнений можно разделить на спектральные, использующие разложения искомых функций по сферическим гармоникам, и чисто разностные. Спектральные методы в ряде случаев более удобны для анализа и интерпретации результатов, однако для их применения требуется предварительная линеаризация уравнений (или организация громоздкой итерационной процедуры по нелинейности), что делает предпочтительными в подобных задачах разностные методы.

Для численного решения системы уравнений (4) необходимо выбрать эффективный метод аппроксимации, который пригоден для данной задачи. Так как возмущения очень быстрые ( $\Delta t = 0.05 \div 0.25$  с), а время распространения волн на большие высоты больше часа, необходимо интегрировать аппроксимированные уравнения с мелким временным шагом, что требует десятки тысяч итераций. Учитывая это обстоятельство и нелинейность системы, мы пришли к выводу, что в данном случае наиболее подходящим является явный разностный метод интегрирования уравнений гидродинамики. При решении системы (4) необходимо учитывать следующее:

1. Так как метод явный, для устойчивости решения системы уравнений (4) необходимо соблюдение условия Куранта–Фридрихса–Леви [9], т.е.  $c \frac{\Delta t}{\Delta z} < 1$ , где  $c$  — скорость звука,  $\Delta t$  и  $\Delta z$  — размер шага сетки соответственно по времени и пространству.

2. Решаем уравнения (4) относительно изменений плотности и температуры, которые могут быть положительными или отрицательными, поэтому нет необходимости использовать численный метод, обеспечивающий положительность решения [10].

3. Нелинейный компонент в уравнении для скорости должен быть аппроксимирован особым методом для обеспечения устойчивости [9].

4. В третьем уравнении системы (4) адвекционное слагаемое надо аппроксимировать в консервативной форме [9].

5. Известно, что фоновая плотность атмосферы  $\rho_0$  с высотой меняется очень быстро, и большие градиенты могут приводить к нефизическим осцилляциям, если использовать метод второго или более высоких порядков. Это обстоятельство необходимо учитывать при выборе разностного метода [11].

Учитывая выше перечисленные обстоятельства, после применения разных методов мы выбрали алгоритм расчета переноса с коррекцией потоков (метод FCT) [10]. За последние 10–15 лет этот метод успешно применяется для разного рода задач гидродинамики. Продемонстрируем применение этого метода для первого уравнения системы. Тогда

$$\overline{\rho_k^n} = \rho_k^n - \frac{\Delta t}{4\Delta z} [(\rho_k^n + \rho_{k+1}^n)(w_k^n + w_{k+1}^n) - (\rho_k^n + \rho_{k-1}^n)(w_k^n + w_{k-1}^n)],$$

где  $k = 0, 1, \dots, K$  — номер ячейки в сетке по вертикали,  $n = 0, 1, \dots, N$  — по времени. Через  $\overline{\rho_k^n}$  обозначается промежуточное значение возмущения плотности. В это уравнение следует включить диффузионную часть, которая обеспечивает устойчивость:

$$\tilde{\rho}_k^n = \overline{\rho_k^n} + \nu (\rho_{k+1}^n - 2\rho_k^n + \rho_{k-1}^n),$$

где  $\nu$  — безразмерный коэффициент диффузии. На втором этапе большая численная диффузия исклю-

чается, но с таким расчетом, чтобы в решении не появились нефизические экстремумы, для той же цели служит специальное ограничение, налагаемое на антидиффузионные потоки. Они вычисляются следующим образом:

$$f_{k+1/2}^c = S_{k+1/2} \times \max \left\{ 0, \min \left[ \left| f_{k+1/2}^{ad} \right|, S_{k+1/2} (\tilde{\rho}_{k+2}^n - \tilde{\rho}_{k+1}^n), S_{k+1/2} (\tilde{\rho}_k^n - \tilde{\rho}_{k-1}^n) \right] \right\},$$

где  $f_{k+1/2}^{ad} = \mu (\overline{\rho_{k+1}^n} - \overline{\rho_k^n})$  — антидиффузионный поток,  $S_{k+1/2} = \text{sign}(f_{k+1/2}^{ad})$ , остальные два выражения — коррекции,  $\mu$  — безразмерный коэффициент антидиффузии. При вычислении антидиффузионных потоков через крайние границы коррекции, соответствующие конечным разностям, выходящим за пределы границ расчетной области, просто выпадают из расчета. Выполним антидиффузионный этап:

$$\rho_k^{n+1} = \tilde{\rho}_k^n - f_{k+1/2}^c + f_{k-1/2}^c.$$

Величина  $\rho_k^{n+1}$  — окончательное значение возмущения плотности на временном слое  $n+1$ . Значение скорости и возмущения температуры находим таким же методом. А нелинейное слагаемое в уравнении сохранения количества движения аппроксимируем следующим образом [9]:

$$w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{3} w_k^n \left( \frac{w_{k+1}^n - w_{k-1}^n}{2\Delta z} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{(w_{k+1}^n)^2 - (w_{k-1}^n)^2}{2\Delta z} \right).$$

Адвекционное слагаемое в уравнении сохранения энергии будет равно [9]:

$$w \frac{\partial T'}{\partial z} = \frac{1}{4} \left[ (w_{k+1}^n + w_k^n) \left( \frac{T'_{k+1}^n - T'_k{}^n}{\Delta z} \right) + (w_k^n + w_{k-1}^n) \left( \frac{T'_k{}^n - T'_{k-1}^n}{\Delta z} \right) \right].$$

Слагаемые, относящиеся к источникам среды, и теплопроводность аппроксимируются в обычной центрально-разностной форме. Возмущения давления находятся из уравнения состояния идеального газа.

Начальные условия для скорости, возмущения плотности и температуры выбирались нулевые. Граничным условием для скорости на нижней границе будет условие прилипания. А на верхней границе значения искомого величин находятся с помощью экстраполяции первого порядка, т.е. градиент величин должен быть постоянным поперек границы. Это позволяет волне уйти через верхнюю границу расчетной области без существенного отражения. Но для температуры такое условие исключает теплопроводность через верхнюю границу, поэтому для нее

производная второго порядка должна быть постоянной. Например, для плотности на верхней границе

$$\rho_K^n = 2\rho_{K-1}^n - \rho_{K-2}^n.$$

**Результаты численного моделирования**

Проведено численное решение системы уравнений (4), которая описывает модельную задачу на равномерной сетке с шагом 5 км по высоте и 0.1 с

по времени. Область численного интегрирования задавалась по вертикальной координате от земной поверхности до высоты 500 км. Использовались реальные профили фоновой плотности и температуры атмосферы модели MSISE-90 (<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/space/model/models/msis.html>). После многих проверок и тестирований для коэффициентов численной диффузии и антидиффузии выбраны

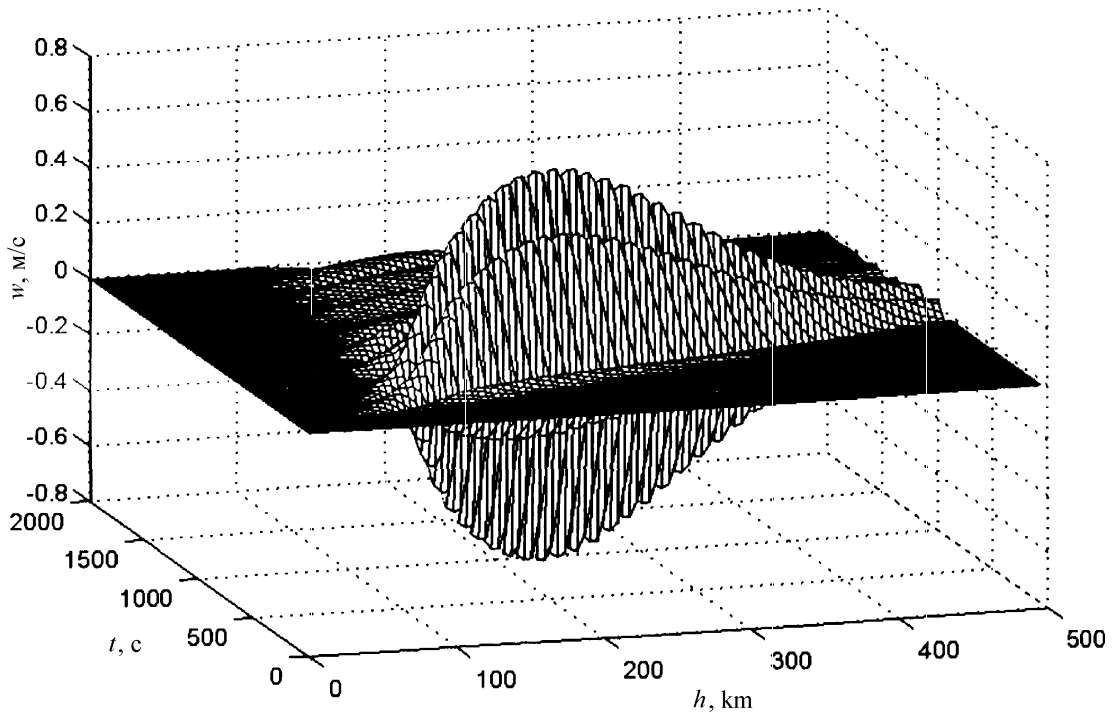


Рис. 1. Вертикальная компонента скорости движения частиц атмосферы над источником

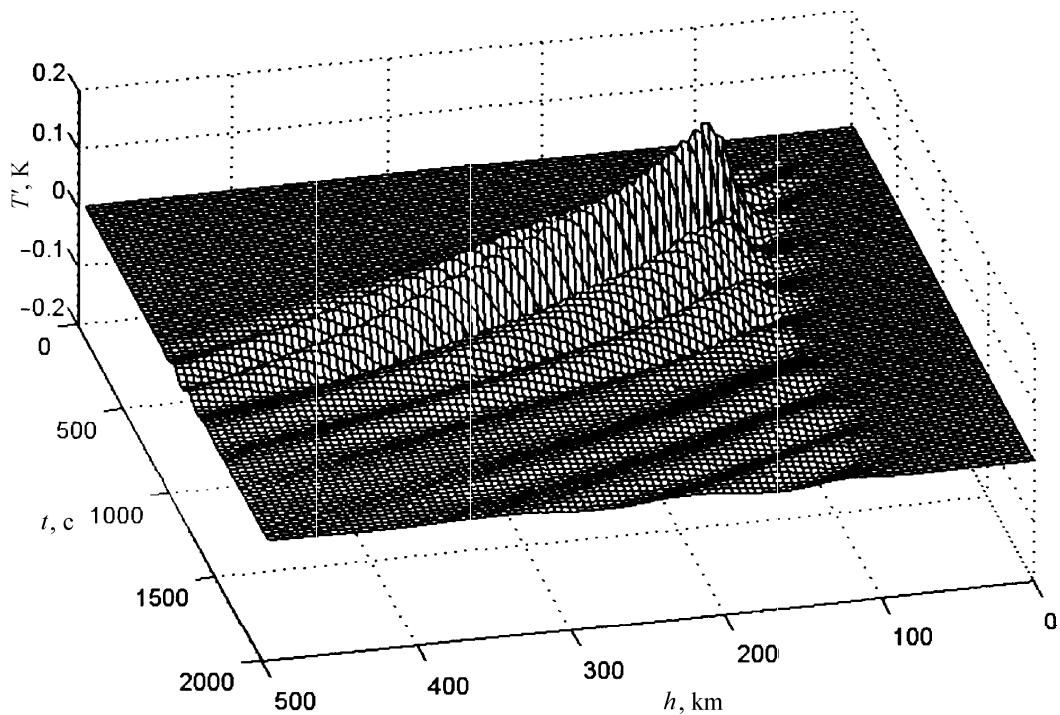


Рис. 2. Возмущения температуры атмосферы над источником

значения  $\nu = \mu = 0.02$ . Для среднего значения коэффициента сопротивления здесь бралось значение 0.0001.

Полученные результаты показывают, что разработанный численный метод абсолютно устойчив для самых сильных импульсных возмущений, происходящих на земле. Полученные результаты показывают генерацию АГВ в атмосфере из-за импульсных наземных источников. На рис. 1 показан график зависимости скорости частиц воздуха от высоты и времени. Здесь параметры источника  $D_0 = 1.5$  м,  $\Delta t = 0.2$  с, в этом случае максимальная скорость движения земной поверхности 5.8 м/с. Как видно из графика, периоды волн составляют 4–5 мин. Период 5 мин соответствует частоте Брента-Вяйсяля атмосферы [1]. Для такого источника возмущение температуры показано на рис. 2. Предварительное сравнение предсказаний нашей модели с данными [2, 8, 12], полученными при наблюдениях, показывает качественное совпадение.

Численный алгоритм позволяет промоделировать возбуждение и распространение АГВ, используя разного рода функции источника. Так как основные проблемы численного решения таких уравнений связаны с вертикальным переносом, этот метод можно успешно применять в двух- и трехмерных случаях.

Авторы благодарны П. А. Крутицкому за обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 02-05-65350).

#### Литература

1. Григорьев Г.И. // Изв. вузов, Радиофизика. 1999. **42**, № 1. С. 3.
2. Francis S.H. // J. Atmos. Terr. Phys. 1975. **37**. P. 1011.
3. Перцев Н.Н., Шалимов С.Л. // Геомагнетизм и аэрономия. 1996. **36**. P. 111.
4. Koshevaya S.V., Perez-Enriquez R., Kotsarenko N.Y. // Geophysica Internacional. 1997. **36**. P. 1.
5. Андреева Е.С., Гохберг М.Б., Куницын В.Е. и др. // Космич. исслед. 2001. **39**, № 1. С. 13.
6. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. М., 1978.
7. Pitteway M., Hines C. // Can. J. Phys. 1963. **41**. P. 1935.
8. Davies J., Archambeau C. // Physics of Earth and Planetary Interiors. 1998. **105**. P. 183.
9. Durran D. Numerical methods for wave equations in Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag, New York, 1999.
10. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. М., 1990.
11. Yongqi W., Kolmbau H. // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2001. **37**. P. 721.
12. Afraimovich E.L., Perevalova N.P., Plotnikov A.V., Uralov A.M. // Ann. Geophys. 2001. **19**. P. 395.

Поступила в редакцию  
04.03.03