

Положение 3. Альтернативное представление усредненного решения МКФ представимо в виде суперпозиции резонансов

$$\bar{\sigma}(E) = \sum_{j=1}^z \frac{\bar{\Theta}^j (\bar{\Gamma}^j)^2}{(E - \bar{E}^j)^2 + (\bar{\Gamma}^j)^2},$$

где $\bar{\Theta}^j = \sum_{i=1}^l \Theta_i^j / l$, $\bar{E}^j = \sum_{i=1}^l E_i^j / l$, $\bar{\Gamma}^j = \sum_{i=1}^l \Gamma_i^j / l$, z — число резонансов, j — номер резонанса, i — номер испытания. Параметры Θ_i^j , E_i^j , Γ_i^j ($i = 1, \dots, l$; $j = 1, \dots, z$) определяются минимизацией функционалов

$$F_i(\Theta_i^1, E_i^1, \Gamma_i^1, \dots, \Theta_i^z, E_i^z, \Gamma_i^z) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i^{\text{pos}} - \sigma_i^{\text{mod}}}{\delta_i} \right)^2,$$

где σ_i^{pos} — возможные решения уравнения (2), найденные по положению 1,

$$\sigma_i^{\text{mod}}(E) = \sum_{j=1}^z \frac{\Theta_i^j (\Gamma_i^j)^2}{(E - E_i^j)^2 + (\Gamma_i^j)^2}.$$

Ошибки $\delta\Theta^j$, δE^j , $\delta\Gamma^j$ при $j = 1, \dots, z$ задаются дисперсионной формулой.

В качестве подтверждения высказанных положений выступают факты, установленные в результате численного эксперимента: поведение общего функционала (3) в итерационном цикле показывает сходимость метода (рис. 2); найдены оптимальные значения ключевых параметров МКФ (используемых далее для физических приложений): $k \approx 50$,

$n = 4k$, $q = 4$, $p \sim 10^2$, $l \geq 20$. Проверки на модельных сечениях показали, что модельная кривая укладывается в полученный коридор ошибок.

Пройдя тестовые испытания, МКФ был применен для восстановления экспериментальных данных, показав при этом устойчивость результата и универсальность. В работе представлены результаты восстановления сечений фотоядерных реакций ${}^{63}\text{Cu}(\gamma, n){}^{62}\text{Cu}$ (рис. 1, 3) и ${}^{232}\text{Th}(\gamma, f)$ (рис. 4) на основе имеющихся кривых выхода [6]. Полученные решения находятся в статистическом соответствии с результатами восстановления методом редукции [6], что подтверждает эффективность нового метода. Процедура фитирования осуществлялась с использованием пакета MINUIT [5].

Авторы выражают благодарность В.В. Варламову за плодотворное обсуждение результатов.

Литература

1. Ишханов Б.С., Капитонов И.М. Взаимодействие электромагнитного излучения с атомными ядрами. М., 1979.
2. Гришин В.К., Ишханов Б.С., Нефедов Г.С. // Вестн. Моск. ун-та. 2002. Физ. Астрон. № 3. С. 44 (Moscow University Phys. Bull. 2002. No. 3. P. 65).
3. Kahaner D., Moler C., Nash S. Numerical Methods and Software. Prentice-Hall International, 1989.
4. Пытьев Ю.П. Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.
5. James F. MINUIT 94.1 (User manual). Geneva, 1994.
6. Варламов В.В., Ишханов Б.С., Руденко Д.С. Препринт НИИЯФ МГУ 2002-19/703.

Поступила в редакцию
12.03.03

РАДИОФИЗИКА

УДК 534

АТТРАКТОР-ТОР В ТРЕХМЕРНОЙ АВТОНОМНОЙ МОДЕЛИ

П. В. Елютин

(кафедра квантовой электроники)

E-mail: pve@shg.phys.msu.su

Построен пример модели трехмерной автономной модели с аттрактором-тором двухчастотного квазипериодического движения.

Исследование устойчивого двухчастотного движения и его трансформаций в диссипативных динамических системах имеет давнюю историю. Еще в период становления теории колебаний были сформулированы основные парадигмы — гармонически зависящее от времени воздействие на автономную автоколебательную систему (синхронизация генера-

тора внешней силой) и взаимодействие двух автономных автоколебательных систем (взаимная синхронизация генераторов), — вошедшие в учебники [1, 2]. Аттрактором первой из них является цилиндр в трехмерном (расширенном) фазовом пространстве, а второй — тор в четырехмерном пространстве. Новый стимул к развитию исследование

двухчастотного движения получило в контексте теории динамического хаоса, поставившей вопрос о разрушении аттракторов двухчастотного движения при переходе к хаосу (в настоящее время только сценариев с образованием странного нехаотического аттрактора насчитывается восемь [3]). Однако в известных работах и здесь исследование ведется либо в рамках неавтономных моделей [3–5], либо с помощью автономных моделей с размерностью фазового пространства четыре и более [6, 7].

Неавтономные модели весьма специфичны: достаточно упомянуть, что движение в расширенном фазовом пространстве инфинитно и что даже при одной динамической переменной в них возможно устойчивое квазипериодическое движение с любым числом частот. Четырехмерные же модели не являются минимальными: по известной теореме Андронова–Витта [8, 9] число частот квазипериодического финитного движения K -мерной динамической системы может достигать $K - 1$. Поэтому, с одной стороны, двухчастотное движение должно присутствовать и в трехмерных системах, а с другой — возникает вопрос о роли дополнительной динамической переменной в четырехмерных моделях и об общности полученных с их помощью результатов. Наконец, использование многомерных моделей затрудняет применение такого эффективного средства исследований, как сечения Пуанкаре.

Целью настоящей работы является построение минимальной трехмерной автономной модели с аттрактором-тором двухчастотного движения.

Возьмем тор с единичным радиусом большой окружности и радиусом ε малой окружности. Декартовы координаты точек на торе могут быть заданы соотношениями

$$\begin{aligned} X &= \cos \varphi(1 + \varepsilon \sin \theta), \\ Y &= \sin \varphi(1 + \varepsilon \sin \theta), \\ Z &= \varepsilon \cos \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть углы φ и θ меняются с постоянными скоростями: $\dot{\varphi} = 1$ (без ограничения общности), $\dot{\theta} = \Omega$. Дифференцируя уравнения (1) по времени и выражая тригонометрические функции через переменные X, Y и Z , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -Y + \Omega X Z \rho^{-1}, \\ \dot{Y} &= X + \Omega Y Z \rho^{-1}, \\ \dot{Z} &= \Omega[1 - \rho], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\rho = (X^2 + Y^2)^{1/2}$. Эти уравнения описывают двухчастотное квазипериодическое движение на торах вида (1), причем параметр ε определяется начальными условиями.

Координаты точек тора (1) удовлетворяют уравнению $T_2(X, Y, Z) = 0$, где

$$T_2 = (\rho - 1)^2 + Z^2 - \varepsilon^2. \quad (3)$$

Внутри тора функция T_2 имеет отрицательные значения, а во внешней области — положительные. Добавим к правым частям уравнений системы (2) некоторые функции f, g и h соответственно, имея целью выбрать их так, чтобы тор (3) стал аттрактором. Тогда производная по времени от функции T_2 будет равна

$$\dot{T}_2 = 2\rho^{-1}[X(\rho - 1)f + Y(\rho - 1)g + Z\rho h]. \quad (4)$$

Если на торе (3) функция \dot{T}_2 обратится в нуль, а вне него знак \dot{T}_2 будет противоположен знаку T_2 , то тор будет аттрактором. Подходящий выбор функций f, g и h можно осуществить разными способами.

Вероятно, простейший — сделать эти функции пропорциональными T_2 и стоящим при них в квадратной скобке коэффициентам с одинаковым коэффициентом пропорциональности $-\alpha < 0$:

$$\begin{aligned} f &= -\alpha T_2 X(\rho - 1), & g &= -\alpha T_2 Y(\rho - 1), \\ h &= -\alpha T_2 Z \rho. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда уравнение (4) примет вид

$$\dot{T}_2 = -T_2 \{2\alpha\rho^{-1} [X^2(\rho - 1)^2 + Y^2(\rho - 1)^2 + Z^2\rho^2]\}. \quad (6)$$

Выражение в фигурных скобках положительно всюду кроме начала координат (являющегося неустойчивой неподвижной точкой системы), и выполнение условия $\dot{T}_2 T_2 < 0$ почти во всем пространстве очевидно.

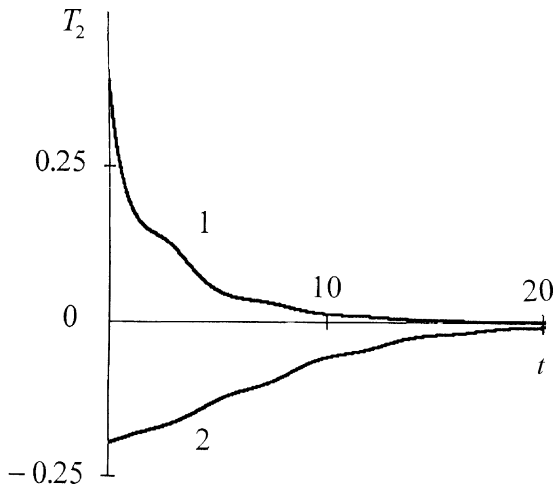
Выпишем явный вид получающейся системы:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -Y + \Omega X Z \rho^{-1} - \alpha X(\rho - 1)T_2, \\ \dot{Y} &= X + \Omega Y Z \rho^{-1} - \alpha Y(\rho - 1)T_2, \\ \dot{Z} &= \Omega[1 - \rho] - \alpha Z \rho T_2. \end{aligned} \quad (7)$$

где T_2 дается формулой (3), а параметр α контролирует скорость притяжения фазовых траекторий к тору. По построению тор является единственным аттрактором этой системы. При мнимых значениях ε аттрактором системы является предельный цикл — окружность единичного радиуса в плоскости OXY .

На рисунке показана найденная численно зависимость тороидального параметра T_2 от времени при двух начальных условиях, соответствующих точкам, лежащим вне ($T_2 > 0$) и внутри ($T_2 < 0$) тора. Релаксация параметра T_2 к предельному (нулевому) значению следует в общем экспоненциальному закону $T_2 \propto \exp(-\gamma t)$ с показателем $\gamma \approx 2\alpha\bar{\rho}\varepsilon^2$, где $\bar{\rho}$ — средний радиус фазовой траектории в плоскости OXY .

Отметим, что изложенным выше способом и при $K \geq 4$ могут быть построены автономные модели в K -мерном фазовом пространстве с единственным аттрактором-тором ($K - 1$) — частотного движения.



Зависимость от времени тороидального параметра T_2 (3), найденная численным интегрированием системы (7) при значениях параметров: $\Omega = \sqrt{2}$, $\alpha = 0.5$ и $\varepsilon = 0.5$. Кривая (1) соответствует начальным условиям $X(0) = 1.8$, $Y(0) = 0.1$, $Z(0) = -0.1$ (точка вне тора), кривая (2) — начальным условиям $X(0) = 1.2$, $Y(0) = 0.1$, $Z(0) = -0.1$ (точка внутри тора)

Возможно, такие модели в силу своей предельной простоты окажутся полезными в исследованиях перехода от квазипериодичности к хаосу.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ (грант 96-15-96476).

Литература

1. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.И. Основы теории колебаний. М., 1988.
2. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М., 1984.
3. Venkatesan A., Lakshmann M. // E-print arXiv: chaosdyn/9806008.
4. Kuznetsov S.P. // E-print arXiv: nlin/0112032.
5. Venkatesan A., Lakshmann M., Prasad A., Ramaswamy R. // Phys. Rev. 2000, **E61**, No. 3. P. 3641.
6. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М., 1990.
7. Yang J. // Phys. Rev. 2000. **E61**, No. 6. P. 6521.
8. Андронов А.А., Витт А.А. // Журн. прикл. физики. 1930. **6**, № 1. С. 119.
9. Андронов А.А. Собрание трудов. М.; Л., 1956.

Поступила в редакцию
30.12.02