Учитывая текущие темпы роста производительности вычислительной техники, можно сделать вывод, что метод конечных элементов будет находить все более широкое применение в различных областях науки и техники.

Литература

1. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Красильникова А.В.* и др. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 5. С. 39.
2. *Dalman G.C.* // Microwave J. 1992. **35**, No. 10. P. 109.
3. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М., 1991.
4. *Митчелл Э., Уэйт Р.* Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М., 1981.
5. *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. М., 1988.
6. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980.
7. *Боголюбов А.Н., Буткарев И.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2002. № 2. С. 3.

Поступила в редакцию
11.11.02

УДК 517.984.5

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ СВЕДЕНИЕМ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ

В. П. Моденов

(*кафедра математики*)

Методом редукции к задаче Коши вычисляются собственные значения оператора Лапласа краевой задачи, описывающей собственные акустические колебания сферы, с несамосопряженным граничным условием третьего рода.

Задача Штурма–Лиувилля о нахождении собственных значений и соответствующих им собственных функций относится к классическим задачам математической физики [1, 2]. Она содержит два вопроса. Первый, связанный с нахождением собственных значений, представляет самостоятельный интерес и может рассматриваться независимо от второго — нахождения собственных функций.

Корректность математической постановки задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого рода (существование, единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части уравнения), а также большой арсенал приближенных аналитических и численных методов ее решения (методы Эйлера, Рунге–Кутта, Адамса, Крылова и т. д.) делают актуальным метод редукции к данной задаче задачи Штурма–Лиувилля.

Рассмотрим основанный на этом методе эффективный алгоритм вычисления собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, не требующий вычисления собственных специальных функций. Он использует редукцию краевой задачи Штурма–Лиувилля с граничным условием третьего рода, содержащим параметр, к задаче Коши для дифференциального уравнения с производной по этому параметру и алгебраической правой частью (дифференциально-параметрический метод [3]). Рассматриваемый алгоритм позволяет находить комплексные собственные значения без вычисления комплекснозначных собственных специальных функций, что часто сопряжено со значительными трудностями. Этот алгоритм дает также возможность получать для собственных значений приближенные аналитические формулы.

В работе [4] метод редукции задачи Штурма–Лиувилля к задаче Коши был применен для вычисления собственных значений третьей краевой задачи для уравнения Бесселя.

В данной работе метод обобщается на оператор Штурма–Лиувилля общего вида, а также вычисляются собственные значения оператора Лапласа третьей краевой задачи для сферы [2]. Эта краевая задача связана с исследованием собственных акустических колебаний сферического резонатора с граничным несамосопряженным условием третьего рода.

В качестве начальных данных задачи Коши, получаемой методом редукции, принимаются собственные значения соответствующих задач Штурма–Лиувилля с граничными условиями Дирихле или Неймана. В задаче на собственные значения для сферы это нули сферической функции Бесселя I рода и ее производной, для которых существует эффективный алгоритм их вычисления [5].

1. Вычисление собственных значений оператора Штурма–Лиувилля с граничным условием третьего рода

Рассмотрим следующую краевую задачу на собственные значения: найти собственные значения λ

уравнения

$$L[R]=(kR')'-qR=-\lambda^2\rho R \quad (0<r<1), \tag{1}$$

где $R=R(r)$ — собственные функции, $k=k(r)$ — дифференцируемая положительная при $0<r\leqslant 1$ функция и $k(0)=0$, $q=q(r)$ и $\rho=\rho(r)$ — заданные непрерывные на $[0,1]$ функции, с граничным условием третьего рода

$$R'+hR=0 \quad \text{при} \quad r=1, \tag{2}$$

где h — заданный, в общем случае комплексный, параметр $(\mathrm{Re}\, h>0)$, и с естественным условием ограниченности

$$|R|<\infty \quad \text{при} \quad r=0. \tag{3}$$

Будем считать собственные значения оператора Штурма–Лиувилля $L(R)$ с несамосопряженным граничным условием (2) $\lambda=\lambda^{\mathrm{III}}$ функциями параметра h:

$$\lambda=\lambda(h),$$

неявно заданными задачей (1)–(3).

Пусть при значениях параметра $h=0$ или $h\to\infty$ собственные значения краевой задачи известны и равны собственным значениям этой задачи с граничными условиями Неймана $\lambda|_{h=0}=\lambda^{\mathrm{II}}$ или Дирихле $\lambda|_{h\to\infty}=\lambda^{\mathrm{I}}$.

Применим алгоритм вычисления собственных значений $\lambda(h)$ рассматриваемой краевой задачи, основанный на редукции к задаче Коши и не требующий нахождения собственных функций [3, 4].

Введем новую переменную, полагая

$$x=\lambda r$$

и обозначая функции

$$R(r)=R(x/\lambda)=y(x),$$

$$k(r)=K(x), \quad q(r)=Q(x), \quad \rho(r)=R(x).$$

Запишем уравнение (1) в форме

$$\lambda^2(Ky')'-Qy+\lambda^2Ry=0 \quad (0<x<\lambda). \tag{4}$$

Граничные условия (2) и (3) примут следующий вид:

$$\lambda y'+hy=0 \quad \text{при} \quad x=\lambda, \tag{5}$$

$$|y|<\infty \quad \text{при} \quad x=0. \tag{6}$$

Полученная задача (4)–(6) задает также неявно собственные значения λ как функции параметра h.

Обозначив логарифмическую производную собственной функции через

$$S(\lambda)=y'/y,$$

запишем граничное условие $(2')$ в виде

$$S(\lambda)=-h/\lambda. \tag{7}$$

Так как $y(\lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4) гипергеометрического типа, то функция $S(\lambda)$ имеет дифференциально-полиномиальное свойство [3], т. е. ее производная выражается в виде полинома от самой функции:

$$S'(\lambda)=P(S(\lambda)). \tag{8}$$

Применяя к уравнению (7) теорему о производной неявно заданной функции $\lambda(h)$ и воспользовавшись дифференциально-полиномиальным свойством (8), приходим к задаче Коши с производной по параметру h и алгебраической правой частью

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda}{dh}=\dfrac{\lambda}{h-\lambda^2P(-h/\lambda)}, \\ \lambda|_{h=0}=\lambda^{\mathrm{II}}. \end{cases}$$

Таким образом, вычисление собственных значений как функций параметра, входящего в граничное условие (2) рассматриваемой задачи Штурма–Лиувилля, сводится к решению задачи Коши для дифференциального уравнения с производной по этому параметру и не связано с вычислением собственных функций краевой задачи.

Если $|h|\ll 1$, то по формуле Тейлора можно получить асимптотику собственных значений

$$\lambda\simeq\lambda^{\mathrm{II}}+\left.\frac{d\lambda}{dh}\right|_{h=0}h.$$

Полагая

$$\alpha=1/h,$$

запишем задачу Коши для дифференциального уравнения с производной по параметру α. В качестве начального условия этой задачи можно принять

$$\lambda|_{\alpha=0}=\lambda^{\mathrm{I}}.$$

Аналогично предыдущему получается при условии $\alpha\ll 1$ асимптотическая формула.

2. Вычисление собственных значений оператора Лапласа для сферы при граничном условии третьего рода

Рассмотрим задачу о собственных акустических колебаниях сферы единичного радиуса с граничным, в общем случае несамосопряженным, условием третьего рода. Эта задача сводится к нахождению собственных значений λ краевой задачи для уравнения

$$\Delta v+\lambda^2 v=0 \tag{9}$$

с условием на поверхности сферы при $r=1$

$$\frac{dv}{dr}+hv=0, \tag{10}$$

где h — заданный, вообще говоря, комплексный $(\mathrm{Re}\, h>0)$ параметр.

Методом разделения переменных в сферической системе координат (r,ϑ,φ) с началом координат в центре сферы, полагая

$$v(r,\vartheta,\varphi)=R(r)Y(\vartheta,\varphi),$$

где $Y(\vartheta,\varphi)$ — сферические функции, и учитывая граничное условие (10), а также естественное условие ограниченности при $r=0$, получаем для функции $R = R(r)$ следующую задачу Штурма–Лиувилля:

$$L[R] = (r^2R')' - n(n+1)R = -\lambda^2 r^2 R \quad (0 < r < 1), \tag{11}$$

$$R' + hR = 0 \text{ при } r = 1, \tag{12}$$

$$|R| < \infty \text{ при } r = 0. \tag{13}$$

Задача (11)–(13) определяет собственные значения как неявно заданные функции параметра h:

$$\lambda = \lambda(h).$$

Пусть при некотором значении параметра h, например при $h = 0$, решение этой задачи известно:

$$\lambda|_{h=0} = \lambda^{\mathrm{II}},$$

где λ^{II} — собственные значения соответствующей задачи Штурма–Лиувилля с граничным условием Неймана

$$R'(1) = 0,$$

т. е. нули производной сферической функции Бесселя I рода [5].

С помощью подстановки

$$x = \lambda r, \quad y(x) = \lambda r R(r)$$

задачу (11)–(13) сводим к задаче, содержащей спектральный параметр λ в граничном условии:

$$y'' + \left(1 - n(n+1)/x^2\right) y = 0 \quad (0 < x < \lambda), \tag{14}$$

$$\lambda y' - (1 - h) y = 0 \text{ при } x = \lambda, \tag{15}$$

$$|y| < \infty \text{ при } x = 0. \tag{16}$$

Введем функцию

$$S(\lambda) = y'/y.$$

В силу условия (14) она имеет дифференциально-полиномиальное свойство:

$$S'(\lambda) = n(n+1)/\lambda^2 - 1 - S^2(\lambda). \tag{17}$$

Граничное условие (15) примет вид

$$S(\lambda) = (1 - h)/\lambda.$$

Это уравнение определяет λ как неявно заданную функцию параметра h. Применив теорему о производной неявно заданной функции и воспользовавшись дифференциально-полиномиальным свойством (17), приходим к следующей задаче Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda}{dh} = \dfrac{\lambda}{\lambda^2 - n(n+1) - h + h^2}, \\ \lambda|_{h=0} = \lambda^{\mathrm{II}}. \end{cases} \tag{18}$$

Решение этой задачи дает искомую зависимость λ от параметра h.

Отсюда при $|h| \ll 1$ по формуле Тейлора имеем

$$\lambda(h) \simeq \lambda^{\mathrm{II}} + \frac{\lambda^{\mathrm{II}}}{(\lambda^{\mathrm{II}})^2 - n(n+1)} h.$$

Вводя параметр $\alpha = 1/h$, запишем задачу Коши (18) следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda}{d\alpha} = \dfrac{\lambda}{n(n+1)\alpha^2 + \alpha - \lambda^2\alpha^2 - 1}, \\ \lambda|_{\alpha=0} = \lambda^{\mathrm{I}}, \end{cases} \tag{19}$$

где λ^{I} — собственные значения соответствующей задачи Штурма–Лиувилля с граничным условием Дирихле

$$R(1) = 0,$$

т. е. нули сферической функции Бесселя I рода [5].

При $|\alpha| \ll 1$ имеем приближенную формулу

$$\lambda(\alpha) \simeq \lambda^{\mathrm{I}}(1 - \alpha).$$

В таблице приведены полученные при численном решении задачи Коши (19) собственные значения третьей краевой задачи для сферы единичного радиуса

$$\lambda^{\mathrm{III}} = \lambda_{n,p},$$

где p — порядковый номер ($p = 1, 2$), а $n = 1, 2$ для некоторых значений α ($h = 1/\alpha$).

	0.01 (100)	0.1 (10)	0.5 (2.0)	1.0 (1.0)	10.0 (0.1)
$\lambda_{1.1}$	4.44	4.06	3.14	2.74	2.79
$\lambda_{1.2}$	7.65	7.06	6.28	6.12	6.12
$\lambda_{2.1}$	5.71	5.23	4.23	3.87	3.95
$\lambda_{2.2}$	9.00	8.34	7.59	7.45	7.45

В заключение отметим, что метод редукции задачи Штурма–Лиувилля к задаче Коши, безусловно, может найти применение в математической физике.

Необходимость решения задач, аналогичных рассмотренным, возникает также при вычислении собственных значений целого ряда краевых задач с несамосопряженными граничными условиями, содержащими параметр. К ним приводит, например, исследование резонансных коаксиальных [6], сферических [7] и других систем с эквивалентными импедансными граничными условиями типа условий Леонтовича.

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* // Уравнения математической физики. М., 1977.
2. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М., 1972.
3. *Моденов В.П.* // ДАН СССР. 1987. **296**, № 3. С. 536.
4. *Моденов В.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1988. № 3. С. 52.
5. *Моденов В.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 3. С. 29 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 3. P. 34).
6. *Моденов В.П.* // Радиотехн. и электроника. 1996. **41**, № 6. С. 695.
7. *Моденов В.П.* // Радиотехн. и электроника. 2000. **45**, № 10. С. 1198.

Поступила в редакцию
25.11.02