УДК 519.2

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ СРЕДНИХ ЧИСЕЛ ЗАПОЛНЕНИЯ В ВЕРОЯТНОСТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ МАСЛОВА

А. В. Поляков

(*кафедра квантовой статистики и теории поля*)

В работе рассматривается система частиц с дискретным набором состояний и ограничениями на числа заполнения. Одновременно рассматриваются два случая: классическая схема испытаний Бернулли и квантовая схема, соответствующая произвольной парастатистике. Число частиц не фиксировано и имеет пуассоновское распределение. Доказано, что в обоих случаях числа заполнения являются независимыми случайными величинами. В случае марковской эволюции вероятностей состояний отдельных частиц выведено нелинейное уравнение для средних чисел заполнения.

1. Вероятностное подпространство с фиксированным числом частиц

Пусть $\Omega_0 = \{\omega_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, K$ — конечное или счетное множество элементарных событий или набор состояний, в которых может находиться частица, P_k — вероятность элементарного события ω_k. Пусть имеется N одинаковых частиц. Будем рассматривать события, состоящие в том, что каждая из N частиц попала в одно из возможных состояний $\omega^{(N)} = \langle \omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \ldots, \omega_{k_N} \rangle$. Поскольку частицы одинаковые, событие $\omega^{(N)}$ можно взаимнооднозначно характеризовать набором чисел заполнения $\mathbf{N} = \langle N_1, N_2, \ldots, N_K \rangle$, N_k — число частиц, попавших в состояние ω_k.

Следуя работам [1–5], будем рассматривать такие системы, в которых число заполнения k-го состояния N_k не может превышать заданного числа M_k, $k = 1, 2, \ldots, K$. Для наборов $\mathbf{N} = \langle N_1, \ldots, N_K \rangle$ и $\mathbf{M} = \langle M_1, \ldots, M_K \rangle$ введем обозначение $\mathbf{N} \leqslant \mathbf{M}$, если $N_k \leqslant M_k$. Пространство событий $\omega^{(N)}$, для которых выполнены условия $\mathbf{N} \leqslant \mathbf{M}$, обозначим $\Omega_N(\mathbf{M})$. Вероятностными пространствами Маслова называются пространства, в которых числа заполнения N_k являются независимыми случайными величинами (см. ниже).

Условная вероятность события $\omega^{(N)} \in \Omega_N(\mathbf{M})$, т. е. вероятность состояния $\omega^{(N)}$ при условии $\mathbf{N} \leqslant \mathbf{M}$, в соответствии со схемой испытаний Бернулли определяется выражением

$$P_N(\mathbf{N}) = \frac{N! \prod\limits_{k=1}^{K} \frac{P_k^{N_k}}{N_k!}}{\sum\limits_{\mathbf{N} \leqslant \mathbf{M}} N! \prod\limits_{k=1}^{K} \frac{P_k^{N_k}}{N_k!}} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{K} \frac{P_k^{N_k}}{N_k!}}{\sum\limits_{\mathbf{N} \leqslant \mathbf{M}} \prod\limits_{k=1}^{K} \frac{P_k^{N_k}}{N_k!}}.$$

Введем обозначение $q(k, N) = \frac{P_k^N}{N!}$, тогда

$$P_N(\mathbf{N}) = \frac{1}{\Gamma_N(\mathbf{M})} \prod_{k=1}^{K} q(k, N_k), \tag{1}$$

$$\Gamma_N(\mathbf{M}) = \sum_{\mathbf{N} \leqslant \mathbf{M}} \prod_{k=1}^{K} q(k, N_k).$$

Если рассматривать распределение Гиббса для идеального газа, то $q(k, N) = P_k^N$, $P_k = \mathrm{e}^{-\varepsilon_k/\theta}$, ε_k — энергия k-го состояния, θ — температура [2, 6].

Лемма 1. *Для величины $\Gamma_N(\mathbf{M})$ и характеристической функции имеют место следующие соотношения:*

$$\Gamma_N(\mathbf{M}) = \frac{1}{N!} \frac{\partial^N}{\partial \alpha^N} \prod_{k=1}^{K} \sum_{l=0}^{M_k} \alpha^l q(k, l) \bigg|_{\alpha=0}, \tag{2}$$

$$\left\langle \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{K} \lambda_k N_k \right\} \right\rangle = \frac{1}{N! \Gamma_N(\mathbf{M})} \frac{\partial^N}{\partial \alpha^N} \times \tag{3}$$

$$\times \prod_{k=1}^{K} \sum_{l=0}^{M_k} \left(\alpha \, e^{i \lambda_k} \right)^l q(k, l) \bigg|_{\alpha=0}.$$

Доказательство. В выражении (1) для $\Gamma_N(\mathbf{M})$ суммирование идет по всем наборам $\mathbf{N}$, для которых выполнены условия $\sum\limits_i N_i = N$ и $\mathbf{N} \leqslant \mathbf{M}$, поэтому эта сумма равна коэффициенту при α^N в выражении

$$\Gamma_N(\mathbf{M}) = \sum_{\substack{\mathbf{N} \leqslant \mathbf{M}, \\ \sum_i N_i = N}} \prod_{k=1}^{K} q(k, N_k) =$$

$$= \left\{ \mathrm{coef}\, \alpha^N : \prod_{k=1}^{K} \sum_{l=0}^{M_k} \alpha^l q(k, l) \right\},$$

поскольку каждому набору $\mathbf{N}$ соответствует определенный выбор по одному слагаемому из каждого сомножителя, и наоборот. После N-кратного дифференцирования и полагая $\alpha = 0$ получаем формулу (2).

Формула (3) доказывается аналогично:

$$\left\langle \exp\left\{ i \sum_{k} \lambda_k N_k \right\} \right\rangle =$$

$$= \sum_{\substack{\mathbf{N}\leqslant\mathbf{M},\\ \sum_i N_i = N}} \exp\Big\{i\sum_k \lambda_k N_k\Big\} \frac{1}{\Gamma_N(\mathbf{M})} \prod_{k=1}^K q(k,N_k) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma_N(\mathbf{M})} \sum_{\substack{\mathbf{N}\leqslant\mathbf{M},\\ \sum_i N_i = N}} \prod_{k=1}^K \Big(q(k,N_k)\, e^{i\,\lambda_k N_k}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma_N(\mathbf{M})} \left\{\operatorname{coef}\alpha^N : \prod_{k=1}^K \sum_{l=0}^{M_k} \Big(\alpha\, e^{i\,\lambda_k}\Big)^l q(k,l)\right\}.$$

Лемма доказана.

2. Вероятностное пространство с переменным числом частиц

Теперь рассмотрим систему, в которой число частиц N не фиксировано. Пусть число частиц, находящихся в системе, имеет пуассоновское*) распределение, тогда вероятность того, что числа заполнения принимают значения $\mathbf{N} = \langle N_1, \ldots, N_K\rangle$, равна

$$\rho_{\mathbf{N}}(z) = e^{-z}\,\frac{z^N}{N!}\left(N!\prod_{k=1}^K \frac{P_k^{N_k}}{N_k!}\right), \quad N = \sum_i N_i,$$

z — константа, которая характеризует распределение Пуассона.

Условная вероятность указанного события при условии $\mathbf{N}\leqslant\mathbf{M}$ равна

$$P(\mathbf{M}) = p_0 z^N \prod_{k=1}^K q(k,N_k), \tag{4}$$

p_0 — константа, которая определяется из условия нормировки, а также имеет смысл вероятности события, при котором все состояния свободны, $N_k = 0$ для всех k.

В случае распределения Гиббса для идеального газа формула (4) также имеет место, где $z = e^{\mu/\theta}$, μ — химический потенциал.

Из условия нормировки получаем

$$1 = \sum_{\mathbf{N}\leqslant\mathbf{M}} P(\mathbf{N}) = \sum_{N=0}^{\infty} p_0 z^N \sum_{\substack{\mathbf{N}\leqslant\mathbf{M},\\ \sum_i N_i = N}} \prod_{k=1}^K q(k,N_k) =$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} p_0 z^N \Gamma_N(\mathbf{M}) =$$

$$= p_0 \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!}\frac{\partial^N}{\partial\alpha^N} \prod_{k=1}^K \sum_{l=0}^{M_k} \alpha^l q(k,l)\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= p_0 \prod_{k=1}^K \sum_{l=0}^{M_k} z^l q(k,l),$$

отсюда находим

$$p_0 = \left(\prod_{k=1}^K \sum_{l=0}^{M_k} z^l q(k,l)\right)^{-1}.$$

Для среднего значения числа частиц получаем

$$\langle N\rangle = \sum_{\mathbf{N}\leqslant\mathbf{M}} N\,P(\mathbf{N}) = p_0 \sum_{N=0}^{\infty} N z^N \Gamma_N(\mathbf{M}) = \tag{5}$$

$$= p_0 z \frac{\partial}{\partial z} \prod_{k=1}^K \sum_{l=0}^{M_k} z^l q(k,l) =$$

$$= p_0 z \sum_{n=1}^K \left(\left(\sum_{l=0}^{M_n} l z^{l-1} q(n,l)\right) \prod_{k=1,\,k\neq n}^K \sum_{l=0}^{M_k} z^l q(k,l)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^K \frac{\sum\limits_{l=0}^{M_n} l z^l q(n,l)}{\sum\limits_{l=0}^{M_n} z^l q(n,l)}.$$

Это выражение связывает среднее число частиц $\langle N\rangle$ и величину z.

Лемма 2. *Вероятность события, состоящего в том, что состояние ω_m свободно, равна*

$$P\{N_m = 0\} = \left(\sum_{l=0}^{M_m} z^l q(m,l)\right)^{-1}.$$

Доказательство. В подпространстве с фиксированным числом частиц N вероятность указанного события равна

$$P_N\{N_m = 0\} = \sum_{\substack{\mathbf{N}\leqslant\mathbf{M},\ N_m = 0,\\ \sum_i N_i = N}} \prod_{k=1}^K q(k,N_k) =$$

$$= \Gamma_{N,\,N_m=0}(\mathbf{M}) = \frac{1}{N!}\frac{\partial^N}{\partial\alpha^N} \prod_{\substack{k=1,\\ k\neq m}}^K \sum_{l=0}^{M_k} \alpha^l q(k,l)\Big|_{\alpha=0},$$

поэтому искомая вероятность

$$P\{N_m = 0\} = \sum_{N=0}^{\infty} P_N\{N_m = 0\} =$$

$$= p_0 \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\substack{\mathbf{N}\leqslant\mathbf{M},\ N_m = 0,\\ \sum_i N_i = N}} \prod_{k=1}^K q(k,N_k) =$$

*) Распределение Пуассона есть предельный случай биномиального распределения при стремлении числа частиц во всей системе и объема всей системы к бесконечности так, что плотность числа частиц остается постоянной.

$$= p_0 \prod_{\substack{k=1,\\ k\neq m}}^{K} \sum_{l=0}^{M_k} z^l q(k,l) = \left(\sum_{l=0}^{M_m} z^l q(m,l)\right)^{-1}.$$

Лемма доказана.

Из леммы (2) следует, что вероятность p_0 события {*все состояния свободны*} равна произведению вероятностей событий {*состояние* ω_m *свободно*} по всем m.

Лемма 3. *Для числа заполнения k-го состояния справедлива следующая формула:*

$$\langle N_k^n\rangle = \frac{\sum\limits_{l=0}^{M_k} l^n z^l q(k,l)}{\sum\limits_{l=0}^{M_k} z^l q(k,l)}, \quad n=1,2,\dots\ . \tag{6}$$

Доказательство. По определению среднего значения получаем

$$\langle N_k^n\rangle = p_0 \sum_{\mathbf{N}\leqslant\mathbf{M}} N_k^n z^N \prod_{i=1}^{K} q(i,N_i) =$$

$$= p_0 \sum_{m=0}^{M_k} m^n \sum_{N=m}^{\infty} z^N \sum_{\substack{\mathbf{N}\leqslant\mathbf{M},\ N_k=m,\\ \sum_i N_i = N}} \prod_{i=1}^{K} q(i,N_i) =$$

$$= p_0 \sum_{m=0}^{M_k} m^n z^m q(k,m) \prod_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{K} \sum_{l=0}^{M_k} z^l q(i,l) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{m=0}^{M_k} m^n z^m q(k,m)}{\sum\limits_{l=0}^{M_k} z^l q(k,l)}.$$

Лемма доказана.

Из леммы (3) и выражения (5) следует, что среднее число частиц $\langle N\rangle$ равно сумме средних чисел заполнения $\langle N_k\rangle$.

Дисперсия числа частиц для распределения (4) равна

$$\left\langle (N-\langle N\rangle)^2\right\rangle = z\frac{\partial}{\partial z}\langle N\rangle - \langle N\rangle^2 .$$

Теорема 1. *Числа заполнения $\langle N_k\rangle$ являются независимыми случайными величинами. Характеристическая функция равна*

$$\left\langle \exp\left\{ i\sum_{k=1}^{K}\lambda_k N_k\right\}\right\rangle = \prod_{k=1}^{K} \frac{\sum\limits_{l=0}^{M_k} \left(z\, e^{i\lambda_k}\right)^l q(k,l)}{\sum\limits_{l=0}^{M_k} z^l q(k,l)}.$$

Доказательство. Для того чтобы доказать независимость случайных величин $\langle N_k\rangle$, надо проверить равенство $\left\langle N_k^a N_j^b\right\rangle = \langle N_k^a\rangle \left\langle N_j^b\right\rangle$ для произвольных $a,b=1,2,\dots$.

$$\left\langle N_k^a N_j^b\right\rangle = p_0 \sum_{m=0}^{M_k}\sum_{n=0}^{M_j} m^a m^b \sum_{\substack{\mathbf{N}\leqslant\mathbf{M},\\ N_k=m}} z^N \prod_{i=1}^{K} q(i,N_i) =$$

$$= p_0 \sum_{m=0}^{M_k}\sum_{n=0}^{M_j} m^a m^b q(k,m) q(j,n) z^m z^n \times$$

$$\times \prod_{\substack{i=1,\\ i\neq k,\ i\neq j}}^{K} \sum_{l=0}^{M_k} z^l q(i,l) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{m=0}^{M_k} m^a z^m q(k,m) \sum\limits_{n=0}^{M_j} n^b z^n q(j,n)}{\sum\limits_{l=0}^{M_k} z^l q(k,l) \sum\limits_{l=0}^{M_j} z^l q(j,l)} = \langle N_k^a\rangle \left\langle N_j^b\right\rangle .$$

Для характеристической функции получаем:

$$\left\langle \exp\left\{ i\sum_{k=1}^{K}\lambda_k N_k\right\}\right\rangle =$$

$$= p_0 \sum_{\mathbf{N}\leqslant\mathbf{M}} \exp\left\{ i\sum_k N_k\lambda_k\right\} z^N \prod_{i=1}^{K} q(i,N_i) =$$

$$= p_0 \prod_{k=1}^{K}\sum_{l=0}^{M_k} \left(z\,\mathrm{e}^{i\lambda_k}\right)^l q(k,l) = \prod_{k=1}^{K} \frac{\sum\limits_{l=0}^{M_k} \left(z\,\mathrm{e}^{i\lambda_k}\right)^l q(k,l)}{\sum\limits_{l=0}^{M_k} z^l q(k,l)}.$$

Теорема доказана.

Вспоминая, что $q(k,N) = \frac{P_k^N}{N!}$, формулу (6) для $n=1$ можно переписать следующим образом:

$$\langle N_k\rangle = F_{M_k}(zP_k)\,, \tag{7}$$

где

$$F_M(x) = \sum_{l=1}^{M} \frac{x^l}{(l-1)!} \Bigg/ \sum_{l=0}^{M} \frac{x^l}{l!} = \tag{8}$$

$$= \left[(1+M)^2\Gamma(1+M,x) - \right.$$
$$\left. - (1+M-x)\Gamma(2+M,x) - \mathrm{e}^{-x}\, x^{2+M}\right] \times$$
$$\times \left[(1+M)\Gamma(1+M,x)\right]^{-1},$$

$\Gamma(a,z) = \int\limits_z^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$ — неполная гамма-функция.

В случае распределения Гиббса для идеального газа формула (7) также справедлива, где

$$F_M(x) = \sum_{l=0}^{M} l x^l \Bigg/ \sum_{l=0}^{M} x^l =$$

$$= x\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{M+1}}{1-x}\right)\frac{1-x^{M+1}}{1-x}. \tag{9}$$

Графики функций (8) и (9) изображены на рис. 1 и 2 соответственно, $\lim\limits_{x\to\infty} F_M(x) = M$.

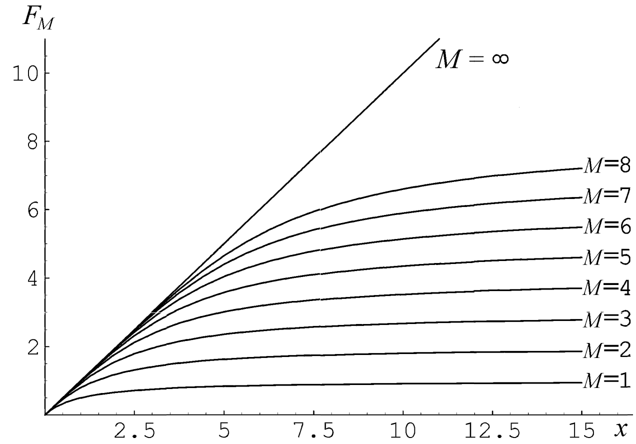

Рис. 1

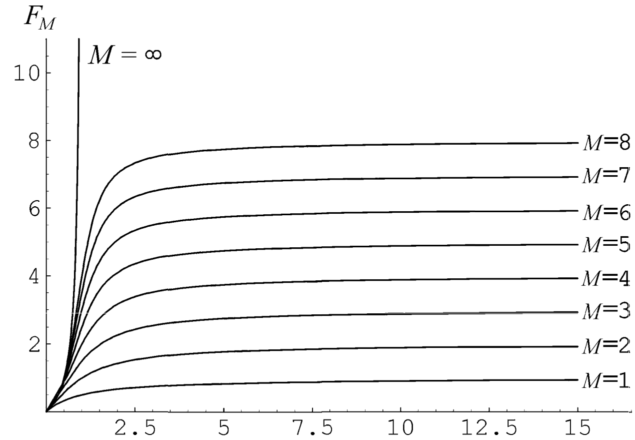

Рис. 2

3. Нелинейное уравнение эволюции для чисел заполнения

Предположим, что неограниченная марковская эволюция вероятностей P_k в Ω_0 описывается генератором $\mathcal{L}$

$$\frac{d}{dt}P_m(t) = \mathcal{L}(P.(t)),$$

где $\mathcal{L}(P.) = \sum\limits_k L_{m,k}P_k$, $L_{m,k}$ — матричное представление генератора $\mathcal{L}$.

Из (7) получаем:

$$\frac{d}{dt}\langle N_m\rangle = \left(\dot{z}P_m + z\dot{P}_m\right) A_{M_m}(zP_m), \tag{10}$$

где $A_M(x) \overset{\text{def}}{=} F'_M(x)$. Среднее число частиц $\langle N\rangle = \sum\limits_k \langle N_k\rangle$ остается постоянным во времени. Обозначая $zP_m = C_{M_m}(\langle N_m\rangle) = F^{-1}_{M_m}(\langle N_m\rangle)$, из (10) получаем:

$$\frac{\dot{z}}{z} = -\frac{\sum\limits_m \dot{P}_m A_{M_m}(zP_m)}{\sum\limits_m P_m A_{M_m}(zP_m)} = \\ = \frac{\sum\limits_m zP_m a_{M_m}(\langle N_m\rangle)}{\sum\limits_m C_{M_m}(\langle N_m\rangle)\, a_{M_m}(\langle N_m\rangle)},$$

где $a_M(x) \overset{\text{def}}{=} A_m(C_M(x)) = F'_M(F(x))$. Уравнение (10) описывает эволюцию средних значений $\rho(m,t) \overset{\text{def}}{=} \langle N_m(t)\rangle$ и может быть переписано в следующей форме, которая не содержит ненаблюдаемых функций $z(t)$ и $P_m(t)$:

$$\frac{d}{dt}\rho(m,t) = a_{M_m}(\rho(m,t))\Bigg(\mathcal{L}_m C_{M.}(\rho(\cdot,t)) - \\ - C_{M_m}(\rho(m,t))\frac{\sum\limits_k a_{M_k}(\rho(k,t))\mathcal{L}_k C_{M.}(\rho(\cdot,t))}{\sum\limits_n a_{M_n}(\rho(n,t))C_{M_n}(\rho(n,t))}\Bigg). \tag{11}$$

По правилу дифференцирования обратной функции

$$\frac{d}{dt}C_M(\rho) = \frac{1}{F'(F(\rho))}\frac{d}{dt}\rho = \frac{1}{a_m(\rho)}\frac{d}{dt}\rho,$$

поэтому (11) может быть преобразовано в следующее уравнение относительно функции $C_{M_k}(\rho(k,t))$:

$$\frac{d}{dt}C_{M_k}(\rho(k,t)) = \Bigg(\mathcal{L}_k C_{M.}(\rho(\cdot,t)) - C_{M_k}(\rho(k,t)) \times \\ \times \frac{\sum\limits_m F'_{M_m}(C_{M_m}(\rho(m,t)))\mathcal{L}_m C_{M.}(\rho(\cdot,t))}{\sum\limits_m F'_{M_m}(C_{M_m}(\rho(m,t)))C_{M_m}(\rho(m,t))}\Bigg).$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Т е о р е м а 2. *Если марковская эволюция вероятностей P_k в пространстве Ω_0 задана генератором $\mathcal{L}$*

$$\frac{d}{dt}P_m(t) = \mathcal{L}(P.(t)),$$

то для средних чисел заполнения $\langle N_k\rangle$ выполнено следующее квазилинейное уравнение:

$$\frac{d}{dt}C_{M_k}(\rho(k,t)) = \Bigg(\mathcal{L}_k C_{M.}(\rho(\cdot,t)) - C_{M_k}(\rho(k,t)) \times \\ \times \frac{\sum\limits_m F'_{M_m}(C_{M_m}(\rho(m,t)))\mathcal{L}_m C_{M.}(\rho(\cdot,t))}{\sum\limits_m F'_{M_m}(C_{M_m}(\rho(m,t)))C_{M_m}(\rho(m,t))}\Bigg),$$

где $C_m(x) = F^{-1}(x)$, $\rho(m,t) = \langle N_m(t)\rangle$.

В заключение автор выражает благодарность профессору А.М. Чеботареву и академику В.П. Маслову за постоянное внимание к работе, полезные обсуждения ряда вопросов и ценные замечания.

Литература

1. *Чеботарев А.М.* // Матем. заметки. 1999. **65**, № 5. С. 746.
2. *Маслов В.П., Чеботарев А.М.* // Докл. РАН. 1999. **365**, № 6. С. 745.

3. *Маслов В.П., Чеботарев А.М.* // Избранные вопросы математики, механики и их приложений // Сб. статей, посвященный 60-летию академика В.А. Садовничего. М., 1999. С. 263.
4. *Маслов В.П., Чеботарев А.М.* // Теор. вер. и ее применения. 1999. **44**, № 2. С. 372.
5. *Chebotarev A.M., Maslov V.P.* // Proc. Int. Conf. on Infinite Dimensional (Stochastic) Analysis and Quantum Physics. January 18–22, 1999. Leipzig.
6. *Chebotarev A.M., Maslov V.P.* // J. Math. Sci. 2001. **105**, No. 6. P. 2519.

Поступила в редакцию
13.05.03

УДК 517.958: 537.311.322

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ФИЗИКИ ЗАМАГНИЧЕННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ ВО ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗАМИ

А. О. Чикилев, П. А. Крутицкий

(*кафедра математики*)

Во внешней многосвязной области с разрезами рассматривается смешанная краевая задача для гармонических функций, возникающая в физике полупроводников. На замкнутых кривых, ограничивающих область, задается условие с косой производной, а на разрезах — условие Дирихле. Доказаны существование и единственность решения. Получено интегральное представление для решения в виде гармонических потенциалов, плотность которых находится из однозначно разрешимой системы интегральных уравнений.

На плоскости $x=(x_1,x_2)\in R^2$ рассмотрим внешнюю связную область, ограниченную простыми замкнутыми кривыми $\Gamma_1^2,\ldots,\ \Gamma_{N_2}^2\in C^{2,0}$, $N_2\geqslant 0$ и простыми разомкнутыми кривыми $\Gamma_1^1,\ldots,$ $\Gamma_{N_1}^1\in C^{2,\lambda}$, $\lambda\in(0,1]$ и $N_1\geqslant 1$, так что кривые не имеют общих точек (в том числе и концов). Положим $\Gamma^1=\bigcup\limits_{n=1}^{N_1}\Gamma_n^1$, $\Gamma^2=\bigcup\limits_{n=1}^{N_2}\Gamma_n^2$ и $\Gamma=\Gamma^1\bigcup\Gamma^2$. Обозначим открытую внешнюю область, ограниченную контуром Γ^2, через $\mathcal{D}$. Считаем, что контур Γ параметризован, а в качестве параметра выступает длина дуги s: $\Gamma_n^k=\{x:\ x=x(s)=(x_1(s),x_2(s)),$ $s\in[a_n^k,b_n^k]\}$, $n=1,\ldots,N_k$, $k=1,2$; так что $a_1^1<b_1^1<\ldots<a_{N_1}^1<b_{N_1}^1<a_1^2<b_1^2<\ldots<a_{N_2}^2<b_{N_2}^2$ и область $\mathcal{D}$ остается справа при возрастании параметра s на контуре Γ^2. Совокупности отрезков $\bigcup\limits_{n=1}^{N_1}[a_n^1,b_n^1]$, $\bigcup\limits_{n=1}^{N_2}[a_n^2,b_n^2]$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{2}\bigcup\limits_{n=1}^{N_k}[a_n^k,b_n^k]$ оси Os обозначаем так же как соответствующие им контура Γ^1, Γ^2 и Γ. Полагаем $C^0(\Gamma_n^2)=\{\mathcal{F}(s)$: $\mathcal{F}(s)\in C^0[a_n^2,b_n^2]$, $\mathcal{F}(a_n^2)=\mathcal{F}(b_n^2)\}$, $n=1,\ldots,N_2$, и $C^0(\Gamma^2)=\bigoplus\limits_{n=1}^{N_2}C^0(\Gamma_n^2)$. Вектор касательной к Γ в точке $x(s)$, направленный по возрастанию параметра s, обозначим $\boldsymbol{\tau}_x=(x_1'(s),x_2'(s))$. Вектор нормали к Γ в точке $x(s)$, совпадающий с касательной $\boldsymbol{\tau}_x$ при повороте на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, обозначим $\mathbf{n}_x=(x_2'(s),-x_1'(s))$. Предположим, что область $\mathcal{D}$ разрезана вдоль контура Γ^1, и рассмотрим контур Γ^1 как совокупность разрезов. Через $(\Gamma^1)^+$ обозначим ту сторону Γ^1, которая остается слева при возрастании параметра s, а через $(\Gamma^1)^-$ — противоположную. Класс функций, непрерывных в $\overline{\mathcal{D}}\backslash\Gamma^1$ и на концах Γ^1, а так же непрерывно продолжимых на контур Γ^1 слева и справа во внутренних точках, обозначаем $C^0(\overline{\mathcal{D}\backslash\Gamma^1})$. При переходе через контур Γ^1 во внутренних точках функции из класса $C^0(\overline{\mathcal{D}\backslash\Gamma^1})$ могут иметь разрыв первого рода (скачок). Через X обозначим множество точек области $\mathcal{D}$, состоящее из концов контура Γ^1: $X=\bigcup\limits_{n=1}^{N_1}(x(a_n^1)\bigcup x(b_n^1))$.

Определение. Функция $u(x)$ принадлежит классу гладкости $\mathbf{K}$, если:

1) $u(x)\in C^0(\overline{\mathcal{D}\backslash\Gamma^1})\bigcap C^2(\mathcal{D}\backslash\Gamma^1)$;

2) $\nabla u(x)\in C^0\left((\overline{\mathcal{D}\backslash\Gamma^1}\backslash X)\backslash\Gamma^2\right)$;

3) при $x\to x(d)\in X$ справедливо неравенство $|\nabla u(x)|<C|x-x(d)|^\delta$, где константа $C>0$, число $\delta>-1$ и $d=a_n^1$ либо $d=b_n^1$, $n=1,\ldots,N_1$;

4) функция $u(x)$ имеет на контуре Γ^2 правильную косую производную [1, 2], то есть на контуре Γ^2 существует равномерный по $x\in\Gamma^2$ предел комбинации из производных $\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}_x}+\beta\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\tau}_x}$, при стремлении по нормали к контуру Γ^2 из области $\mathcal{D}\backslash\Gamma^1$.

Задача $\mathbf{U}$. *Найти гармоническую в области $\mathcal{D}\backslash\Gamma^1$ функцию $u(x)$ из класса $\mathbf{K}$, удовлетворяющую граничным условиям*

$$u|_{x(s)\in(\Gamma^1)^+}=F^+(s),\quad u|_{x(s)\in(\Gamma^1)^-}=F^-(s),\qquad(1)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}_x}+\beta\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\tau}_x}\right|_{x(s)\in\Gamma^2}=F(s),\quad\beta=\mathrm{const};\qquad(2)$$