3. *Маслов В.П., Чеботарев А.М.* // Избранные вопросы математики, механики и их приложений // Сб. статей, посвященный 60-летию академика В.А. Садовничего. М., 1999. С. 263.
4. *Маслов В.П., Чеботарев А.М.* // Теор. вер. и ее применения. 1999. **44**, №2. С. 372.
5. *Chebotarev A.M., Maslov V.P.* // Proc. Int. Conf. on Infinite Dimensional (Stochastic) Analysis and Quantum Physics. January 18–22, 1999. Leipzig.
6. *Chebotarev A.M., Maslov V.P.* // J. Math. Sci. 2001. **105**, No. 6. P. 2519.

Поступила в редакцию
13.05.03

УДК 517.958: 537.311.322

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ФИЗИКИ ЗАМАГНИЧЕННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ ВО ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗАМИ

А. О. Чикилев, П. А. Крутицкий

(*кафедра математики*)

Во внешней многосвязной области с разрезами рассматривается смешанная краевая задача для гармонических функций, возникающая в физике полупроводников. На замкнутых кривых, ограничивающих область, задается условие с косой производной, а на разрезах — условие Дирихле. Доказаны существование и единственность решения. Получено интегральное представление для решения в виде гармонических потенциалов, плотность которых находится из однозначно разрешимой системы интегральных уравнений.

На плоскости $x=(x_1,x_2)\in R^2$ рассмотрим внешнюю связную область, ограниченную простыми замкнутыми кривыми $\Gamma_1^2,\ldots,\ \Gamma_{N_2}^2\in C^{2,0}$, $N_2\geqslant 0$ и простыми разомкнутыми кривыми $\Gamma_1^1,\ldots,\Gamma_{N_1}^1\in C^{2,\lambda}$, $\lambda\in(0,1]$ и $N_1\geqslant 1$, так что кривые не имеют общих точек (в том числе и концов). Положим $\Gamma^1=\bigcup\limits_{n=1}^{N_1}\Gamma_n^1$, $\Gamma^2=\bigcup\limits_{n=1}^{N_2}\Gamma_n^2$ и $\Gamma=\Gamma^1\bigcup\Gamma^2$. Обозначим открытую внешнюю область, ограниченную контуром Γ^2, через $\mathcal{D}$. Считаем, что контур Γ параметризован, а в качестве параметра выступает длина дуги s: $\Gamma_n^k=\{x:\ x=x(s)=(x_1(s),x_2(s)),\ s\in[a_n^k,b_n^k]\}$, $n=1,\ldots,N_k$, $k=1,2$; так что $a_1^1<b_1^1<\ldots<a_{N_1}^1<b_{N_1}^1<a_1^2<b_1^2<\ldots<a_{N_2}^2<b_{N_2}^2$ и область $\mathcal{D}$ остается справа при возрастании параметра s на контуре Γ^2. Совокупности отрезков $\bigcup\limits_{n=1}^{N_1}[a_n^1,b_n^1]$, $\bigcup\limits_{n=1}^{N_2}[a_n^2,b_n^2]$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{2}\bigcup\limits_{n=1}^{N_k}[a_n^k,b_n^k]$ оси Os обозначаем так же как соответствующие им контура Γ^1, Γ^2 и Γ. Полагаем $C^0(\Gamma_n^2)=\{\mathcal{F}(s)\colon \mathcal{F}(s)\in C^0[a_n^2,b_n^2],\ \mathcal{F}(a_n^2)=\mathcal{F}(b_n^2)\}$, $n=1,\ldots,N_2$, и $C^0(\Gamma^2)=\bigoplus\limits_{n=1}^{N_2}C^0(\Gamma_n^2)$. Вектор касательной к Γ в точке $x(s)$, направленный по возрастанию параметра s, обозначим $\boldsymbol{\tau}_x=(x_1'(s),x_2'(s))$. Вектор нормали к Γ в точке $x(s)$, совпадающий с касательной $\boldsymbol{\tau}_x$ при повороте на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, обозначим $\mathbf{n}_x=(x_2'(s),-x_1'(s))$. Предположим, что область $\mathcal{D}$ разрезана вдоль контура Γ^1, и рассмотрим контур Γ^1 как совокупность разрезов. Через $(\Gamma^1)^+$ обозначим ту сторону Γ^1, которая остается слева при возрастании параметра s, а через $(\Gamma^1)^-$ — противоположную. Класс функций, непрерывных в $\overline{\mathcal{D}}\backslash\Gamma^1$ и на концах Γ^1, а так же непрерывно продолжимых на контур Γ^1 слева и справа во внутренних точках, обозначаем $C^0(\overline{\mathcal{D}\backslash\Gamma^1})$. При переходе через контур Γ^1 во внутренних точках функции из класса $C^0(\overline{\mathcal{D}\backslash\Gamma^1})$ могут иметь разрыв первого рода (скачок). Через X обозначим множество точек области $\mathcal{D}$, состоящее из концов контура Γ^1: $X=\bigcup\limits_{n=1}^{N_1}(x(a_n^1)\bigcup x(b_n^1))$.

Определение. Функция $u(x)$ принадлежит классу гладкости $\mathbf{K}$, если:

1) $u(x)\in C^0(\overline{\mathcal{D}\backslash\Gamma^1})\bigcap C^2(\mathcal{D}\backslash\Gamma^1)$;

2) $\nabla u(x)\in C^0\left((\overline{\mathcal{D}\backslash\Gamma^1}\backslash X)\backslash\Gamma^2\right)$;

3) при $x\to x(d)\in X$ справедливо неравенство $|\nabla u(x)|<C|x-x(d)|^\delta$, где константа $C>0$, число $\delta>-1$ и $d=a_n^1$ либо $d=b_n^1$, $n=1,\ldots,N_1$;

4) функция $u(x)$ имеет на контуре Γ^2 правильную косую производную [1, 2], то есть на контуре Γ^2 существует равномерный по $x\in\Gamma^2$ предел комбинации из производных $\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}_x}+\beta\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\tau}_x}$, при стремлении по нормали к контуру Γ^2 из области $\mathcal{D}\backslash\Gamma^1$.

Задача $\mathbf{U}$. *Найти гармоническую в области $\mathcal{D}\backslash\Gamma^1$ функцию $u(x)$ из класса $\mathbf{K}$, удовлетворяющую граничным условиям*

$$u|_{x(s)\in(\Gamma^1)^+}=F^+(s),\quad u|_{x(s)\in(\Gamma^1)^-}=F^-(s),\qquad(1)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}_x}+\beta\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\tau}_x}\right|_{x(s)\in\Gamma^2}=F(s),\quad\beta=\mathrm{const};\qquad(2)$$

и условиям на бесконечности:

$$|u(x)| = O(1), \quad |\nabla u(x)| = O(|x|^{-2}),$$
$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \infty. \tag{3}$$

Все условия задачи **U** понимаются в классическом смысле. Задача **U** описывает электрический ток в полупроводниковой пленке, расположенной в постоянном однородном магнитном поле [1, 2]. Разрезы моделируют электроды в полупроводниковой пленке. При $N_2 = 0$ задача **U** совпадает с задачей Дирихле вне разрезов на плоскости, которая является частным случаем задачи, изученной в [3]. Внешняя задача с косой производной ($N_1 = 0$) исследовалась в [1, 2] и здесь не рассматривается.

Теорема 1. *Задача* **U** *имеет не более одного решения.*

Доказательство проводится методом энергетических тождеств [2, 3].

Будем строить решение задачи **U**, предполагая, что

$$F(s) \in C^0(\Gamma^2); \quad F^+(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma^1),$$
$$F^-(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma^1), \quad \lambda \in (0,1], \tag{4}$$

и выполнены условия согласования

$$F^+(a_n^1) = F^-(a_n^1), \;\; F^+(b_n^1) = F^-(b_n^1), \;\; n = 1, \ldots, N_1. \tag{5}$$

Дифференцируя граничные условия (1), заменим их эквивалентными:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_x}\right|_{x(s)\in(\Gamma^1)^+} = F'^+(s), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_x}\right|_{x(s)\in(\Gamma^1)^-} = F'^-(s), \tag{6}$$

$$u(x(a_n^1)) = F^+(a_n^1), \quad n = 1, \ldots, N_1. \tag{7}$$

Здесь $F'^{\pm}(s) = \dfrac{d}{ds}F^{\pm}(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma^1)$ и учтено, что $(\partial/\partial\boldsymbol{\tau}_x) = (\partial/\partial s)$.

Функция $\mathcal{F}(s)$ принадлежит пространству $C_\kappa^\omega(\Gamma^1)$ с $\omega \in (0,1]$ и $\kappa \in [0,1)$, если $\mathcal{F}_0(s) = \mathcal{F}(s) \prod\limits_{n=1}^{N_1} |s - a_n^1|^\kappa |b_n^1 - s|^\kappa \in C^{0,\omega}(\Gamma^1)$. Норма в пространстве $C_\kappa^\omega(\Gamma^1)$ определяется соотношением $\|\mathcal{F}(s)\|_{C_\kappa^\omega(\Gamma^1)} = \|\mathcal{F}_0(s)\|_{C^{0,\omega}(\Gamma^1)}$.

Длину кривой Γ_n^2 обозначим через $\mathcal{L}_n$ ($n = 1, \ldots, N_2$). Пусть D_n — открытая внутренняя область, ограниченная кривой Γ_n^2, а Y_n — произвольная фиксированная точка, лежащая в области D_n ($n = 1, \ldots, N_2$). Будем использовать обозначение $\int\limits_{\Gamma^k} \ldots ds = \sum\limits_{n=1}^{N_k} \int\limits_{a_n^k}^{b_n^k} \ldots ds$ при $k = 1, 2$.

Решение задачи **U** будем искать в виде:

$$u[\mu,\nu](x) = V_1[\mu](x) + T_1[\nu](x) + V_2[\mu](x) +$$
$$+ \beta T_2[\mu](x) + h[\mu](x) + G; \tag{8}$$

где G — константа, подлежащая определению в процессе решения задачи;

$$V_1[\mu](x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^1} \mu(\sigma) \ln|x - y(\sigma)| d\sigma,$$

$$T_1[\nu](x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^1} \nu(\sigma)\psi(x, y(\sigma)) d\sigma;$$

$$T_2[\mu](x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^2} \theta[\mu](\sigma)\psi(x, y(\sigma)) d\sigma,$$

$$V_2[\mu](x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^2} \theta[\mu](\sigma) \ln|x - y(\sigma)| d\sigma;$$

$$\theta[\mu](\sigma) = \mu(\sigma) - \frac{1}{\mathcal{L}_n}\int\limits_{\Gamma_n^2} \mu(\xi)\, d\xi,$$

$$\sigma \in \Gamma_n^2, \quad n = 1, \ldots, N_2;$$

$$h[\mu](x) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{N_2} \ln|x - Y_n| \int\limits_{\Gamma_n^2} \mu(\sigma)\, d\sigma,$$

где $T_1[\nu](x)$ и $T_2[\mu](x)$ — угловые потенциалы [1]. Плотность $\mu(s)$ будем искать в пространстве $C^0(\Gamma^2) \oplus C_\kappa^\omega(\Gamma^1)$ с $\omega \in (0,1]$ и $\kappa \in [0,1)$, плотность $\nu(s)$ — в пространстве $C^{0,\lambda}(\Gamma^1)$. Ядро углового потенциала $\psi(x,y)$ — многозначная гармоническая функция, которая определяется (с точностью до $2\pi m$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$) формулами $\cos\psi(x,y) = \frac{x_1 - y_1}{|x-y|}$, $\sin\psi(x,y) = \frac{x_2 - y_2}{|x-y|}$, где $|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Гармонические функции $\ln|x-y|$ и $\psi(x,y)$ при $x, y \in \Gamma$ и $x \neq y$ связаны соотношениями Коши–Римана:

$$\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial \mathbf{n}_x} = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial \boldsymbol{\tau}_x}, \quad \frac{\partial \ln|x-y|}{\partial \boldsymbol{\tau}_x} = -\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial \mathbf{n}_x}. \tag{9}$$

Пусть x — произвольная фиксированная точка в области $\mathcal{D}\backslash\Gamma^1$, тогда в потенциалах $T_1[\nu](x)$ и $T_2[\mu](x)$ под $\psi(x,y)$ понимается любая фиксированная ветвь этой функции, которая непрерывно меняется по $y \in \Gamma$.

Для того чтобы потенциал $T_1[\nu](x)$ был однозначным в области $\mathcal{D}\backslash\Gamma^1$, необходимо потребовать выполнение следующих условий [1, 4]:

$$\int\limits_{\Gamma_n^1} \nu(\sigma) d\sigma = 0, \quad n = 1, \ldots, N_1. \tag{10}$$

Плотность углового потенциала $T_2[\mu](x)$ удовлетворяет условиям, необходимым для его однозначности по построению: $\int\limits_{\Gamma_n^2} \theta[\mu](\sigma) d\sigma = 0$, $n = 1, \ldots, N_2$.

Интегрируя угловые потенциалы $T_1[\nu](x)$ (с помощью (10)) и $T_2[\mu](x)$ по частям, можно записать их в виде потенциалов двойного слоя. Тем самым, если условия (10) выполнены, то (8) — однозначная гармоническая функция в области $\mathcal{D}\backslash\Gamma^1$.

Из свойств потенциалов простого и двойного слоя [5, §31.2] получим, что при выполнении условий (10) для функции (8) справедлива следующая асимптотическая формула:

$$u[\mu,\nu](x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\mu(\sigma)\,d\sigma\ln|x| + G + O(|x|^{-1}),$$

$$|x|\to\infty. \tag{11}$$

Функция (8) удовлетворяет условию (3) на бесконечности, если

$$\int\limits_{\Gamma}\mu(\sigma)d\sigma = 0. \tag{12}$$

Пусть $\nu(s)\in C^{0,\lambda}(\Gamma^1)$, $\mu(s)\in C^{\omega}_{\kappa}(\Gamma^1)\oplus C^0(\Gamma^2)$ $\Big(\omega\in(0,1],\ \kappa\in[0,1)\Big)$ и условия (10), (12) выполнены. Используя результаты [1, 4], можно показать, что функция (8) удовлетворяет всем условиям задачи $\mathbf{U}$, кроме граничных условий (2), (6), (7).

Удовлетворяя граничному условию (2) с помощью методики из работы [1, §3] и формул (9), получим интегральное уравнение относительно функций $\mu(s)$, $\nu(s)$ на контуре Γ^2:

$$\mathbf{A}_2[\mu](s) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^1}\nu(\sigma)\left\{\beta\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x} - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}_x}\right\}\times$$

$$\times\ln|x(s)-y(\sigma)|d\sigma = F(s),\quad s\in\Gamma^2; \tag{13}$$

где

$$\mathbf{A}_2[\mu](s) = (1+\beta^2)\Bigg(-\frac{\theta[\mu](s)}{2} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^2}\theta[\mu](\sigma)\frac{\partial\ln|x(s)-y(\sigma)|}{\partial\mathbf{n}_x}d\sigma\Bigg) -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^1}\mu(\sigma)\left\{\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x} + \beta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}_x}\right\}\ln|x(s)-y(\sigma)|d\sigma +$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x} + \beta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}_x}\right\}h[\mu](x(s)).$$

Из результатов [4] вытекает, что $\frac{\partial\ln|x(s)-y(\sigma)|}{\partial\mathbf{n}_x}\in$ $\in C^0(\Gamma^2\times\Gamma^2)$, если $\Gamma^2\in C^{2,0}$. Можно показать, что уравнение (13) относительно функции $\mu(s)$ является уравнением второго рода с непрерывным ядром.

Учитывая граничное условие (6) и используя предельные формулы для производных гармонических потенциалов [1, 4] и (9), получим интегральные уравнения на контуре Γ^1 относительно функций $\mu(s),\nu(s)$:

$$\mathbf{A}_1[\mu](s) \pm \frac{\nu(s)}{2} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^1}\nu(\sigma)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x}\ln|x(s)-y(\sigma)|d\sigma =$$

$$= F'^{\pm}(s),\quad s\in\Gamma^1; \tag{14}$$

где

$$\mathbf{A}_1[\mu](s) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^1}\mu(\sigma)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}_x}\ln|x(s)-y(\sigma)|d\sigma -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^2}\theta[\mu](\sigma)\left\{\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}_x} + \beta\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x}\right\}\ln|x(s)-y(\sigma)|d\sigma +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}_x}h[\mu](x(s)).$$

Формула (14) получена при $x\to(\Gamma^1)^{\pm}$ и содержит два интегральных уравнения. Верхний знак + в (14) отвечает интегральному уравнению на $(\Gamma^1)^+$, нижний знак – отвечает интегральному уравнению на $(\Gamma^1)^-$. Вычитая интегральные уравнения (14) друг из друга, найдем функцию

$$\nu(s) = \big(F'^{+}(s) - F'^{-}(s)\big)\in C^{0,\lambda}(\Gamma^1) \tag{15}$$

в требуемом классе гладкости. Из формул (5) и (15) следует, что функция $\nu(s)$ автоматически удовлетворяет условиям (10).

Подставим функцию (15) в (13), (14). Из (13) получим интегральное уравнение второго рода с непрерывным ядром относительно функции $\mu(s)$ на контуре Γ^2:

$$\mathbf{A}_2[\mu](s) = F(s) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^1}\big(F'^{+}(\sigma) - F'^{-}(\sigma)\big)\times$$

$$\times\left\{\beta\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x} - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}_x}\right\}\ln|x(s)-y(\sigma)|d\sigma,\quad s\in\Gamma^2. \tag{16}$$

Складывая уравнения (14), получим интегральное уравнение относительно функции $\mu(s)$ на контуре Γ^1:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma^1}\mu(\sigma)\frac{1}{\sigma-s}d\sigma + \mathbf{Z}[\mu](s) = F'^{+}(s) + F'^{-}(s) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma^1}\big(F'^{+}(\sigma) - F'^{-}(\sigma)\big)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x}\ln|x(s)-y(\sigma)|d\sigma,$$

$$s\in\Gamma^1; \tag{17}$$

где $\mathbf{Z}[\mu](s) = \mathbf{A}_1[\mu](s) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma^1}\mu(\sigma)\frac{1}{\sigma-s}d\sigma$. Из результатов [4] имеем, что $\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x}\ln|x(s)-y(\sigma)|$, $\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}_x}\ln|x(s)-y(\sigma)| + \frac{1}{\sigma-s}\right)\in C^{0,\lambda}(\Gamma^1\times\Gamma)$, если $\Gamma^1\in C^{2,\lambda}$. Следовательно, интегральный оператор $\mathbf{Z}[\mu](s)$ имеет гёльдерово ядро. Поэтому (17) — сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши [6]. Правые части в уравнениях (16), (17) принадлежат пространствам $C^0(\Gamma^2)$ и $C^{0,\lambda}(\Gamma^1)$ соответственно.

Подставляя в условия (7) функцию (8), получим систему уравнений относительно функции $\mu(s)$:

$$V_1[\mu](x(a_n^1)) + V_2[\mu](x(a_n^1)) + \beta T_2[\mu](x(a_n^1)) + G =$$

$$= F^{+}(a_n^1) - T_1[\nu](x(a_n^1)),\quad n=1,\ldots,N_1; \tag{18}$$

где функция $\nu(s) = F'^{+}(s) - F'^{-}(s)$. В результате справедлива

Теорема 2. *Пусть* $\Gamma^2 \in C^{2,0}$, $\Gamma^1 \in C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0,1]$, *и выполнены условия* (4), (5). *Если система уравнений (12), (16), (17), (18) имеет решение* $\{\mu(s), G\}$, *такое, что* $\mu(s) \in C^{\omega}_{\kappa}(\Gamma^1) \oplus C^0(\Gamma^2)$ $(\omega \in (0,1],\ \kappa \in [0,1))$, *то решение задачи* $\mathbf{U}$ *существует и выражается формулой* (8), *где функция* $\nu(s) = F'^{+}(s) - F'^{-}(s)$.

Лемма 1. *Пусть* $\Gamma^2 \in C^{2,0}$, $\Gamma^1 \in C^{2,\lambda}$, $\lambda \in \in (0,1]$. *Если однородная система уравнений* (12), (16), (17), (18) *имеет решение* $\{\mu^0(s), G^0\}$, *такое, что* $\mu^0(s) \in C^{\omega}_{\kappa}(\Gamma^1) \oplus C^0(\Gamma^2)$ $(\omega \in (0,1],$ $\kappa \in [0,1))$, *то это решение тривиальное, т. е.* $\mu^0(s) \equiv 0$ *при* $s \in \Gamma$, $G^0 = 0$.

Доказательство. Предположим, что $\{\mu^0(s), G^0\}$ — решение однородной системы (12), (16), (17), (18), такое, что $\mu^0(s) \in C^{\omega}_{\kappa}(\Gamma^1) \oplus C^0(\Gamma^2)$. Функция $\mu^0(s)$ и константа G^0 обращают однородную систему (12), (16), (17), (18) в тождества.

Рассмотрим функцию $u^0(x) = u[\mu^0, 0](x)$, определенную формулой (8) с константой G^0. По теореме 2 функция $u^0(x)$ является решением однородной задачи $\mathbf{U}$. Из теоремы 1 получим, что $u^0(x) \equiv 0$ при $x \in \mathcal{D} \backslash \Gamma^1$. В силу тождества (12) из асимптотики (11) имеем: $G^0 = 0$. Пользуясь предельной формулой для нормальной производной потенциала простого слоя [5, §31.2], получим:

$$(\partial u^0/\partial \mathbf{n}_x)\big|_{x(s)\in(\Gamma^1)^+} - (\partial u^0/\partial \mathbf{n}_x)\big|_{x(s)\in(\Gamma^1)^-} = \\ = \mu^0(s) \equiv 0, \quad s \in \Gamma^1. \tag{19}$$

Используя формулы для интегралов (3.6), (3.8) из [2, с. 1202] и интегрируя однородное тождество (16) по кривой Γ^2_n, $n = 1, \ldots, N_2$, находим:

$$\int_{\Gamma^2_n} \mu^0(s)\,ds = 0, \quad n = 1, \ldots, N_2. \tag{20}$$

Однородное тождество (16) в силу формул (19), (20) принимает вид:

$$\mu^0(s) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma^2} \mu^0(\sigma) \frac{\partial \ln |x(s) - y(\sigma)|}{\partial \mathbf{n}_x} d\sigma = 0, \quad s \in \Gamma^2. \tag{21}$$

Уравнение (21) возникает при решении внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа в области $\mathcal{D}$ и было изучено в работе [7]. В [7, лемма 6] доказано, что однородное уравнение (21) имеет только тривиальное решение в пространстве $C^0(\Gamma^2)$. Следовательно, $\mu^0(s) \equiv 0$ при $s \in \Gamma^2$.

Тем самым однородная система (12), (16), (17), (18) имеет только тривиальное решение: $\mu^0(s) \equiv 0$ при $s \in \Gamma$, и $G^0 = 0$, что и требовалось доказать.

Система интегральных уравнений (12), (16), (17), (18) может быть изучена методом, развитым в работе [8]. Используя [8] и лемму 1 убеждаемся, что справедлива

Лемма 2. *Пусть* $\Gamma^2 \in C^{2,0}$, $\Gamma^1 \in C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0,1]$, *и выполнены условия* (4), (5). *Система уравнений* (12), (16), (17), (18) *фредгольмова и имеет единственное решение* $\{\mu(s), G\}$, *такое, что* $\mu(s) \in C^{p}_{1/2}(\Gamma^1) \oplus C^0(\Gamma^2)$, *где* $p = \min\{1/2, \lambda\}$.

Из леммы 2 и теоремы 2 следует теорема существования.

Теорема 3. *Пусть* $\Gamma^2 \in C^{2,0}$, $\Gamma^1 \in C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0,1]$, *и выполнены условия* (4), (5). *Тогда решение задачи* $\mathbf{U}$ *существует и выражается формулой* (8), *где функция* $\nu(s) = F'^{+}(s) - F'^{-}(s)$, *а* $\{\mu(s), G\}$ — *решение системы уравнений* (12), (16), (17), (18), *гарантированное леммой 4.*

В силу [4, теор. 5] и представления (8) решение задачи $\mathbf{U}$ принадлежит классу $\mathbf{K}$ с $\delta = -\frac{1}{2}$.

Работа поддержана грантом РФФИ 02-01-01067.

Литература

1. *Крутицкий П.А.* // ЖВМ и МФ. 1991. **31**, №1. С. 109.
2. *Крутицкий П.А., Чикилев А.О.* // Дифф. уравнения. 2000. **36**, № 9. С. 1196.
3. *Крутицкий П.А.* // Дифф. уравнения. 1997. **33**, № 9. С. 1181.
4. *Крутицкий П.А.* // ЖВМ и МФ. 1994. **34**, № 8-9. С. 1237.
5. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.
6. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
7. *Крутицкий П.А.* // Матем. заметки. 1996. **60**, №1. С. 40.
8. *Крутицкий П.А.* // Докл. РАН. 2001. **376**, №1. С. 17.

Поступила в редакцию
03.06.03