УДК 530.1

ГИБРИДНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА В МОДЕЛИ ВЕССА–ЗУМИНО

Н. А. Козлов

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Рассмотрено применение гибридной перенормировки в модели Весса–Зумино. Проведено доказательство тождеств Уорда. Проведено общее доказательство того, что перенормировка не нарушает суперсимметрию в модели.

Введение

Как известно, перенормировка является одной из важнейших составляющих пертурбативной квантовой теории поля. Ей посвящено множество работ и монографий. В настоящее время известно большое количество схем перенормировки, более или менее удобных. Однако некоторые проблемы, связанные прежде всего с сохранением различных симметрий, остаются до сих пор не до конца решенными. Так, не до конца решенной остается проблема перенормировки в схемах с суперсимметрией, особенно в суперсимметричных калибровочных теориях.

Все имеющиеся на сегодняшний день схемы регуляризации содержат в себе предпосылки либо для нарушения калибровочной симметрии, либо для нарушения суперсимметрии. Например, размерная регуляризация [1] нарушает суперсимметрию, так как последняя очень чувствительна к изменению размерности пространства. Размерная редукция [2] несамосогласованна из-за того, что она содержит скрытое разбиение четырехмерного пространства на два бесконечномерных. Как было показано в [3], уже на трехпетлевом уровне это приводит к явно неправильным результатам. И хотя в некоторых случаях пользоваться размерной редукцией можно, она, конечно, не является полностью удовлетворительной.

В серии работ [4–6] было продемонстрировано, что в указанных случаях очень удобной может быть так называемая «гибридная перенормировка», сочетающая в себе методы размерной регуляризации и регуляризации с помощью высших производных. Однако в отличие от методов размерной регуляризации пространство не является бесконечномерным, так как дополнительные степени свободы не входят равноправно с физическими. Компоненты импульса разбиваются на физические и теневые, и все действия со спинорами производятся в четырехмерном пространстве-времени. Таким образом, исчезают упомянутые предпосылки к нарушению симметрий, связанных с размерностью пространства.

1. Гибридная перенормировка

Рецепт так называемой гибридной перенормировки [4] был сформулирован как обобщение «размерной перенормировки по линиям» [5–6]. Производящий функционал перенормированных функций Грина в рамках данной схемы имеет вид

$$Z(\varepsilon_a \dots \varepsilon_b, j) = N^{-1} \exp(\Delta_a^r(\varepsilon_a)) \dots \exp(\Delta_b^r(\varepsilon_b)) \times \\ \times \exp(iW(\varphi)C(j,\varphi))\Big|_{\varphi=0}, \qquad (1)$$

где обозначено

$$\Delta_a^r(\varepsilon_a) = \frac{i}{2}\int d\mu_r(p)\,\frac{\delta}{\delta\varphi_\mu} D_{\mu\nu}(p)\frac{\delta}{\delta\varphi_\nu}.$$

Здесь φ_μ — поля и j_μ — соответствующие им токи, $D_{\mu\nu}(p)$ — пропагаторы и $W(\varphi)$ — неквадратичная часть действия. N — это нормировочный множитель, а $C(j,\varphi)$ — обычный в таких случаях прибавляемый к действию член, во многих случаях его можно положить равным $j_\mu\varphi^\mu$ (подробнее см. [4–6]). Линии разбиты по типам $a, b, \dots$. Параметр ε свой для каждого типа линии или некоторого набора типов, что выбирается при адаптации гибридной перенормировки к конкретной модели. В суперсимметричных моделях он будет единым для всех полей, входящих в один супермультиплет. В дальнейшем мы будем рассматривать случай с единым ε.

Знаком $\int d\mu_r(p)$ обозначено так называемое перенормированное интегрирование, введенное впервые в [4] и определяемое таким образом:

$$\int d\mu(p,\tilde p,\varepsilon)\,F(p^2,\tilde p^2,pq,\tilde p\tilde q) =$$

$$= (-1)^\xi(\mu^2)^{-\varepsilon}\pi^{\varepsilon-\xi}\Gamma^{-1}(\varepsilon)\lim_{\beta\to 0}\int d^4p\,(\mu^2-p^2)^{-\beta}\times \\ \times \lim_{\beta'\to 0}\int d^{2\xi}\tilde p\,(\tilde p^2-p^2)^{-\beta'}\int d\omega^2\,(\omega^2)^{\varepsilon-1}\left(\frac{\partial}{\partial\omega^2}\right)^\xi \times \\ \times F(p^2,\tilde p^2+\omega^2,pq,\tilde p\tilde q), \qquad (2)$$

с устремлением ε к нулю и последующим отбрасыванием полюсных по ε членов (импульсы разбиты на физические p и теневые; последние обозначены $\tilde p$ [4]). При достаточно больших ξ, как показано в [4], правая часть (2) от ξ не зависит.

В работе [4] показано, что в формуле (1) можно использовать регуляризированое интегрирование, т. е. формулу (2) без отбрасывания полюсов, если вместо действия $W(\varphi)$ ввести перенормированное действие

$$W_\Lambda = W(\varphi) + \Lambda(\varphi), \qquad (3)$$

где $\Lambda(\varphi)$ — контрчлены. В той же статье показано, что (2) сводится к следующему:

$$\int d^{2\varepsilon}\tilde{p}\, d^4p\, F(p,\tilde{p}),$$

причем теневые импульсы можно объединить как с физическими импульсами, так и с массами. После чего пропагатор, например скалярного поля (в евклидовой метрике), будет иметь вид

$$S(p,\tilde{p}) = \frac{1}{p^2+\tilde{m}^2} = \frac{1}{p^2+(m+M^{-1}\tilde{p}^2)^2}.$$

Здесь и далее будет обозначено $\tilde{m} = m + M^{-1}\tilde{p}^2$, M — размерный параметр.

Пусть имеется линейное преобразование полей $\varphi \to \varphi + f(p,\varphi)\alpha$, оставляющее на классическом уровне действие инвариантным (α — инфинитезимальный параметр). Тогда на формальном уровне получим производящее уравнение для тождеств Уорда:

$$\int dp\, j^v \left(f_v\left(p;\frac{\delta}{i\delta j^\nu}\right)\right) Z(j,\varepsilon) = 0. \qquad (4)$$

Однако в действительности квантовые поправки могут нарушать (4). Как показано в работе [4], в рамках гибридной перенормировки правая часть равна не нулю, а следующему выражению:

$$\begin{aligned} R = N^{-1}\int d\mu(p,\tilde{p},\varepsilon_a)\exp(\Delta(\varepsilon_a)) f_\nu(p,\varphi) \times \\ \times \left[\varphi_\mu D^{-1}_{\mu\nu} - \frac{\delta W_\Lambda}{\delta\varphi_\nu}\right]\exp(iW_\Lambda(\varphi)C(j,\varphi))\Big|_{\varphi=0}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Воспользуемся индукцией по числу петель. Пусть на n-петлевом уровне перенормированное действие, т. е. действие, в котором учтены все контрчлены до n-петлевого порядка включительно, инвариантно относительно преобразований. Мы должны показать, что и на $n+1$-петлевом уровне оно останется инвариантным.

Пользуясь тем, что операторы $\Delta^r_a(\varepsilon_a)$ и $\int d\mu_r$ можно менять местами, если при переходе к пределу используется один и тот же параметр ε, мы найдем, что $R=0$ в $n+1$-петлевом приближении, т. е. соотношение (4) справедливо для производящего функционала функций Грина в $n+1$-петлевом уровне. Это происходит потому, что стоящий под знаком суммы оператор $\exp(\Delta)$, действуя на операторы поля, превращает их в комбинацию пропагаторов, равную, как легко видеть из инвариантности действия относительно преобразований суперсимметрии, нулю. Производящий функционал здесь следует записать в форме, в которой в действие введены контрчлены до n-петлевого порядка.

После стандартного преобразования Лежандра [9] получим из него производящее уравнение для сильносвязных функций Грина. Варьируя его теперь по различным токам и беря вакуумные средние, получим соотношения (тождества Уорда) между различными функциями Грина, распадающиеся на соотношения между регулярными и сингулярными частями функций Грина. Расходимости в сингулярных частях будут чисто поверхностными — остальные учтены в перенормированном действии (3). Если мы установим, что эти соотношения между сингулярными частями не нарушают инвариантность перенормированого действия относительно преобразований суперсимметрии, то мы докажем, что и в $n+1$-петлевом приближении действие имеет инвариантный вид и индукция замкнется.

2. Модель

Модель Весса–Зумино [7–8] — простейшая суперсимметричная модель с лагранжианом:

$$\begin{aligned} &L = L_0 + L_m + L_g; \\ &L_0 = \frac{1}{2}\left[(\partial A)^2 + (\partial B)^2 + i\psi\hat{\partial}\psi + F^2 + G^2\right]; \\ &L_m = m\left(FA + GB - \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi\right); \\ &L_g = g\left(FA^2 - GB^2 - 2GAB - \psi\psi A - i\psi\gamma^5\psi B\right). \end{aligned}$$

Лагранжиан включает поля: скалярное A, псевдоскалярное B, спинорное ψ и составные поля — F и G. Лагранжиан очевидно инвариантен относительно преобразований суперсимметрии:

$$\begin{aligned} &\delta A = i\bar{\alpha}\psi, \quad \delta B = i\bar{\alpha}\gamma^5\psi, \\ &\delta\psi = \partial_\mu(A-\gamma^5 B)\gamma^\mu\alpha + (F-\gamma^5 G)\alpha, \\ &\delta F = i\bar{\alpha}\hat{p}\psi, \quad \delta G = i\bar{\alpha}\hat{p}\gamma^5\psi, \end{aligned} \qquad (6)$$

что проверяется с помощью тождеств Фирца. Чтобы использовать процедуру гибридной перенормировки, заменим лагранжиан L на

$$\tilde{L} = \int d^{2\varepsilon}\tilde{p}\,\left(L_0 + m^{-1}\tilde{m}L_m + L_g\right). \qquad (7)$$

Поля имеют дополнительную зависимость от теневого импульса $\tilde{p}$. Лагранжиан (7) тоже очевидно инвариантен относительно преобразований (6). Пропагаторы полей будут иметь вид

$$\langle AA\rangle = \frac{1}{p^2+\tilde{m}^2}, \quad \langle FA\rangle = \frac{\tilde{m}}{p^2+\tilde{m}^2}$$

и т. д. Заметим, что теперь во всех диаграммах теневые импульсы могут течь и во внешних линиях. Этот факт надо учитывать при подсчете степени расходимости. Для диаграмм, по внешним линиям которых течет только физический импульс, она равна $d = 4 - I_{FA,BG} - E_{A,B} - 2E_{F,G} - 3/2E_\psi$. Степень же расходимости по теневым импульсам $d_t = 2d$, что требует введения новых контрчленов. Так, собственная энергия электрона расходится квадратично по теневому импульсу, и на формальном уровне требуется введение контрчлена, пропорционального $\tilde{p}^4$. Это недопустимо для сохранения перенормируемости теории, и мы покажем, что в действительности такие контрчлены вводить не нужно.

3. Общее доказательство

Теперь рассмотрим общий ход доказательства. Пусть в n-петлевом приближении перенормированное действие имеет вид

$$S = \int d^4p\, d^{2\varepsilon}\tilde{p} \times \times \left(z^{-1}L_0 + z\left(m + \frac{\tilde{p}^2}{Z_M M}\right) m^{-1}L_m + z_g L_g\right). \tag{8}$$

Тогда, как было сказано в пункте 1, величина R в $n+1$-петлевом приближении будет равна нулю. Но тогда для производящего функционала сильносвязных функций в $n+1$ порядке получаем выражение

$$\int d^4p \left(iR_\psi \frac{\partial\Gamma}{\partial r_A} + i\gamma^5 \frac{\partial\Gamma}{\partial r_B} + i\hat{\partial}R_\varphi \frac{\partial\Gamma}{\partial r_F} + i\gamma^5\hat{\partial}R_\psi \frac{\partial\Gamma}{\partial r_G} + \right. \left. + \frac{\partial\Gamma}{\partial r_\psi}\left(r_F + \gamma^5 r_G - \hat{\partial}\left(r_A + i\gamma^5 r_B\right)\right)\right) = 0, \tag{9}$$

где $W[j] = -i\ln Z[j]$, $\Gamma = W - \int d^4x\, j_i r_i$, $r_A = = \delta W/\delta j_A$ — обычное преобразование Лежандра [9]. Теперь, варьируя это выражение по различным полям и беря вакуумные средние, получаем различные соотношения для функций Грина в $n+1$-петлевом приближении. Из них в свою очередь следуют соотношения на расходящиеся части функций Грина, а соответственно и на контрчлены, которые необходимо ввести, чтобы перенормировать $n+1$-петлевое действие. Эти полюса по ε будут отвечать только расходимостям, связанным с индуктивной $n+1$-й петлей, так как все остальные расходимости уже скомпенсированы. Нам остается только показать, что общий вид этих контрчленов не выходит за рамки того, что предположено в действии (8).

Итак, рассмотрим конкретные нетривиальные соотношения, получающиеся из (9). Например:

$$\hat{p}\Gamma_{AF} - i\Gamma_{AA} + i\hat{p}\Gamma_{\psi\psi} = 0,$$

где символами Γ_{AA}, $\Gamma_{\psi\psi}$ и т. д. обозначены соответствующие сильносвязные функции Грина. Эти соотношения получаются, если проварьировать производящее уравнение по A и по ψ и усреднить по вакуумным состояниям. Теперь подставим в них сингулярные (т. е. полюсные по ε) части в соответствии со степенью расходимости, например,

$$\Gamma^{(\sin g)}_{FF} = \Gamma^{(0)}_{FF},$$
$$\Gamma^{(\sin g)}_{AA} = \Gamma^{(0)}_{AA} + p^2\Gamma^{(2)} + \tilde{p}^2\tilde{\Gamma}^{(2)}_{AA} + \tilde{p}^4\tilde{\Gamma}^{(4)}_{AA},$$
$$\Gamma^{(\sin g)}_{AA} = \Gamma^{(0)}_{\psi\psi} + \hat{p}\Gamma^{(1)}_{\psi\psi} + \tilde{p}^2\tilde{\Gamma}^{(2)}_{\psi\psi},$$

где $\Gamma^{(n)}$ и $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ обозначены соответствующие члены разложения сингулярных частей по физическому и теневому импульсу. Разрешая получившуюся систему соотношений, придем к соотношениям для них, таким как, например,

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}_{AA} = \tilde{\Gamma}^{(4)}_{BB} = 0. \tag{10}$$

Конкретно соотношение (10) значит, что нам не нужно вводить в теорию контрчлены, пропорциональные четвертой степени теневого импульса. Заметим, что это существенный пункт в доказательстве — древесный лагранжиан не содержит соответствующих членов, перенормировкой которых можно было бы их устранить. Появление таких членов в некоторых теориях — специфическое свойство гибридной перенормировки, однако во всех интересных с точки зрения практики случаях эти члены сокращаются и не портят перенормируемость теории.

Далее, для второй степени теневого импульса получаем:

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}_{AA} = \tilde{\Gamma}^{(2)}_{BB} = 0,$$

т. е. перенормировки параметра Z_M не требуется. Наконец, для вершинных частей аналогично получим:

$$\Gamma^{(0)}_{ABB} = \Gamma^{(0)}_{AAA} = 0, \tag{11}$$

$$\Gamma^{(0)}_{\psi\psi B} = -\Gamma^{(0)}_{GAB} = -\Gamma^{(0)}_{FAA} = -\Gamma^{(0)}_{FBB}. \tag{12}$$

Формула (12) означает, что нам потребуется только один контрчлен для перенормировки вершин имеющегося типа, (11) — что в процессе перенормировки вершины типа AAB, AAA не генерируются.

Итак, производя все связанные с этим вычисления, получим, что соотношения между контрчленами не выводят действие за рамки формулы (8). Доказательство завершено.

4. Заключение

Итак, в настоящей статье показано, как рецепт гибридной перенормировки действует в случае простой суперсимметричной модели. Этот метод, с одной стороны, достаточно прост, а с другой — имеет большие возможности расширения своего применения. Так, в статье [10] показано, как указанный метод работает в калибровочных теориях. В случае с более сложными моделями вычисления в доказательстве перенормируемости и сохранения древесных симметрий теории усложняются, но основные преимущества схемы перенормировки остаются.

В заключение хочу выразить благодарность проф. Д.А. Славнову за проявленное внимание к настоящей работе и полезные обсуждения на всех этапах ее подготовки.

Литература

1. *Коллинз Дж.* Перенормировка. М., 1988.
2. *Siegel W.* // Phys. Lett. 1979. **84 B**. P. 193.
3. *Avdeev L., Tarasov O.* // Phys. Lett. 1982. **112 B**. P. 356.
4. *Славнов Д.А.* // ТМФ. 2000. **122**. С. 399.
5. *Славнов Д.А.* // ТМФ. 1998. **114**. С. 148.
6. *Славнов Д.А.* // ТМФ. 1997. **110**. С. 397.
7. *Iliopoulos B. Zumino B.* // Nucl. Phys. 1974. **B74**. P. 262.
8. *Wess P., Zumino B.* // Nucl. Phys. 1974. **B70**. P. 39.
9. *Ициксон К., Зюбер Ж.* Квантовая теория поля. М., 1984.
10. *Славнов Д.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 3. С. 12.

Поступила в редакцию
03.06.03