

РАДИОФИЗИКА

УДК 519.246; 524

**КОГЕРЕНТНАЯ ОБРАБОТКА ВЫХОДНОГО СИГНАЛА
РЕЗОНАНСНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ АНТЕНН ПРИ ГАУССОВЫХ
ШУМАХ**

А. В. Гусев, В. Н. Руденко

(ГАИШ)

E-mail: avg@sai.msu.ru, rvn@sai.msu.ru

Рассматриваются особенности когерентной обработки информации, полученной с помощью работающих в режиме быстрой фильтрации («Fast filtering») твердотельных резонансных гравитационных антенн, при обнаружении широкополосных гравитационных импульсов с неизвестными параметрами на фоне аддитивных гауссовых помех.

1. В настоящее время в условиях эксплуатации находится сеть твердотельных криогенных резонансных гравитационных антенн (РГА) [1–3]. Поэтому проблема оптимальной обработки информации, полученной с помощью таких установок, представляется актуальной. Тем более, что, по мнению специалистов, реальная чувствительность большебазовых лазерно-интерферометрических антенн, введение которых в эксплуатацию ожидается в ближайшее время, на первом этапе окажется на уровне действующих твердотельных РГА.

В состав современных твердотельных РГА входит дополнительный элемент — механический трансформатор смещения. Применение такого устройства обеспечивает согласование (по шумам) механической системы и электродинамического преобразователя. Наличие двух степеней свободы приводит к определенной специфике формирования банка данных по отношению к одномодовым твердотельным РГА с «геофизическим» уровнем чувствительности («Geograv», Италия, «Улитка», МГУ, ГАИШ [4, 5]).

В режиме медленной фильтрации («Slow filtering» [1]) на вход аналого-цифрового преобразователя поступает векторный случайный процесс $\mathbf{E}(t) = [E_1(t) E_2(t)]^T$, где $E_1(t)$ и $E_2(t)$ — квадраты огибающих неперекрывающихся по частоте квазигармонических сигналов на выходах отдельных частотных каналов (в состав каждого канала входит аналоговый оптимальный фильтр). Фазовая информация в этом режиме не сохраняется.

Более информативным представляется режим быстрой фильтрации («Fast filtering» [1]). В этом режиме осуществляется когерентная (в смысле [6]) цифровая обработка выходного сигнала РГА на видеочастотах. Применение такой методики позволяет не только уменьшить влияние характерной для аналоговых систем нестабильности, но также обеспечивает минимальные искажения формы полезного сигнала и сохраняет вероятностные свойства помехи на выходе РГА.

В данной работе рассматривается оптимальный алгоритм обнаружения сигнала в режиме быстрой фильтрации, учитывающий «тонкую структуру» скалярного широкополосного низкочастотного процесса на выходе преобразователя частоты. Предложена оптимальная схема обработки (с помощью преобразования Гильберта) информации в этом режиме. Основные результаты могут быть непосредственно использованы при синтезе цифрового алгоритма по аналоговому прототипу [6].

2. Пусть $\lambda = (0, 1)$ — параметр обнаружения. Тогда узкополосный процесс $x(t)$ на выходе линейного тракта РГА можно рассматривать как смесь

$$x(t) = \lambda s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

квазигармонических полезного сигнала $s(t)$ и аддитивной гауссовой помехи $n(t)$. Воспользовавшись комплексной формой записи произвольного квазигармонического процесса, имеем: $x(t) = \operatorname{Re}[\tilde{x}(t) \exp\{j\omega_0 t\}]$, $s(t) = \operatorname{Re}[\tilde{s}(t) \exp\{j\omega_0 t\}]$, $n(t) = \operatorname{Re}[\tilde{n}(t) \exp\{j\omega_0 t\}]$, где $\tilde{x}(t)$, $\tilde{s}(t)$ и $\tilde{n}(t)$ — комплексные огибающие, $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$, ω_1 и ω_2 — собственные частоты механической системы, $\omega_1 \approx \omega_2$.

В режиме быстрой фильтрации когерентная обработка информации производится на видеочастотах. Преобразование частоты сигнала вниз осуществляется непосредственно в процессе дискретизации [7] выходного сигнала $x(t)$. Дискретизированный процесс $x_\Delta(t)$ определяется следующей формулой:

$$x_\Delta(t) = A \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \operatorname{Re}[\tilde{x}(t) \exp\{j(\omega_0 - m\omega_\Delta)t\}], \quad (2)$$

где A — масштабный коэффициент, Δt и $\omega_\Delta = 2\pi/\Delta t$ — шаг и частота дискретизации, $c_k = \operatorname{sinc}[k\pi\tau_0/\Delta t]$, τ_0 — длительность тактового импульса. При $\omega_\Delta \geq 2\omega_m$ (ω_m — максимальная частота в спектре комплексной огибающей $\tilde{x}(t)$) спектры отдельных слагаемых в правой части выражения (2) не перекрываются, что позволяет их

разделить с помощью полосовых фильтров. Пусть $\Omega = (\omega_0 - m_0 \omega_\Delta) \ll \omega_0$ — промежуточная частота. Тогда низкочастотный процесс $x_0(t)$ на выходе преобразователя частоты представляется в виде

$$x_0(t) = \operatorname{Re}[\tilde{x}(t) \exp\{j\Omega t\}], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

В частности, для РГА «Explorer» ([1]) $\omega_1/2\pi \approx 907.05$ Гц, $\omega_2/2\pi \approx 923.26$ Гц, $\omega_0/2\pi \approx 915.15$ Гц. Следовательно, при частоте дискретизации $\omega_\Delta/2\pi = 220$ Гц промежуточная частота равна $\Omega/2\pi \approx 35.15$ Гц.

Учитывая (1) и (3), можем рассматривать низкочастотный процесс

$$x_0(t) = \lambda s_0(t) + n_0(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

как смесь полезного низкочастотного (видео) сигнала $s_0(t) = \operatorname{Re}[\tilde{s}(t) \exp\{j\Omega t\}]$ и аддитивной гауссовой низкочастотной помехи $n_0(t) = \operatorname{Re}[\tilde{n}(t) \exp\{j\Omega t\}]$. Пусть $g(t) = \operatorname{Re}[\tilde{g}(t) \exp\{j\omega_0 t\}]$ — импульсная характеристика линейного тракта РГА, $\tilde{g}(t)$ — комплексная огибающая. Тогда комплексная огибающая $\tilde{s}(t)$ полезного сигнала на выходе РГА определяется интегралом типа свертки:

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(t-t') \tilde{f}_s(t') dt' = \\ &= a \tilde{g}(t-\tau) \exp\{j(\varphi_0 - \omega_0 \tau)\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tilde{f}_s(t)$ — комплексная огибающая широкополосного (на входе) гравитационного импульса $f_s(t)$ с равномерным в полосе пропускания $(\omega_0 \pm \omega_x)$ РГА спектром; a — амплитуда, $a \geq 0$, $\tau \in (0, T)$ — момент возникновения, φ_0 — случайная начальная фаза. Отметим, что при анализе чувствительности РГА «Explorer» [1] используется идеализированная модель полезного сигнала в виде δ -импульса:

$$f_s(t) = a_0 \delta(t-\tau), \quad (6)$$

где a_0 — неизвестный масштабный коэффициент, который может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Комплексная огибающая узкополосного сигнала $s(t)$ на выходе РГА при такой модели гравитационного импульса определяется формулой (5) при $\varphi_0 = 0$ и $a = a_0$.

Принимая во внимание, что $\tilde{g}(t) = \sum_{i=1}^2 \tilde{g}_i(t) \exp\{j(-1)^i \omega_b t\}$, где $\tilde{g}_i(t)$ — комплексная огибающая импульсной характеристики РГА в отдельной mode, $\omega_b = (\omega_2 - \omega_1)/2$ — частота биений в механической системе [1], из (4) и (5) имеем:

$$s_0(t) = a s_{01}(t-\tau), \quad s_{01}(t) = \operatorname{Re}[\exp\{j\vartheta\} v(t)], \quad (7)$$

где $s_{01}(t)$ — полезный сигнал с единичной амплитудой,

$$v(t) = \sum_{i=1}^2 \tilde{g}_i(t) \exp\{j\Omega_i t\} = v_0(t) + j v_1(t), \quad (8)$$

$$v_0(t) = \operatorname{Re}[v(t)], \quad v_1(t) = \operatorname{Im}[v(t)],$$

$\Omega_i = (-1)^i \omega_b + \Omega$, $\vartheta = \varphi_0 - \varphi_\tau$, $\varphi_\tau = m_0 \omega_\Delta \tau$ (в работе [1] неизвестный фазовый сдвиг φ_τ рассматривается как «фаза дельта-функции»).

При дальнейшем анализе будем предполагать, что

$$V(j\omega) = \sum_{i=1}^2 \tilde{G}_i[j(\omega - \Omega_i)] \approx 0 \text{ при } \omega < 0, \quad (9)$$

где $V(j\omega) \leftrightarrow v(t)$, $\tilde{G}_i(j\omega) \leftrightarrow g_i(t)$. Условие (9) позволяет рассматривать полезный сигнал $s_0(t)$ на выходе преобразователя частоты как бигармонический процесс, представляющий смесь двух узкополосных неперекрывающихся по спектрам колебаний с разнесенными частотами Ω_1 и Ω_2 . Так, для РГА «Explorer» (1994 г.) $\omega_b/2\pi \approx 8.10$ Гц и, следовательно, $\Omega_1/2\pi \approx 27.05$ Гц, $\Omega_2/2\pi \approx 43.25$ Гц при полосах пропускания отдельных каналов [1] $\Delta\nu_1 \approx 0.13$ Гц, $\Delta\nu_2 \approx 0.14$ Гц.

3. Оптимальную схему когерентной обработки информации в режиме быстрой фильтрации можно определить, воспользовавшись стандартной методикой синтеза оптимального приемника (оптимальным по Вудворту приемником называется устройство, выходной сигнал которого пропорционален безусловному функционалу отношения правдоподобия [6, 8]). При байесовском подходе безусловный функционал отношения правдоподобия определяется путем усреднения условного функционала отношения правдоподобия по случайным параметрам полезного сигнала, априорное распределение которых предполагается известным. При небайесовском подходе, основанном на обобщенном критерии максимального правдоподобия, неизвестные параметры сигнала заменяются соответствующими максимально-правдоподобными оценками [6, 8].

Условный функционал отношения правдоподобия $\Lambda[x_0|a.\tau, \vartheta]$ при обнаружении полезного гравитационного сигнала $s_0(t)$ (7), (8) на фоне аддитивной гауссовой помехи $n_0(t)$ со спектральной плотностью $N_0(\omega)$ определяется следующим выражением [6, 8]:

$$\begin{aligned} \Lambda[x_0|a.\tau, \vartheta] &\approx \exp \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{X_0(j\omega) S_0^*(j\omega)}{N_0(j\omega)} d\omega \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{|S_0(j\omega)|^2}{N_0(\omega)} d\omega \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $X_0(j\omega) \leftrightarrow x_0(t)$, $S_0(j\omega) = S_0(j\omega, a, \tau, \vartheta)$.

При фильтровом варианте [6] оптимального приемника-обнаружителя случайный низкочастотный процесс $x_0(t)$ поступает на вход оптимального по критерию сигнал-шум линейного фильтра. При коррелированной аддитивной гауссовой помехе $n_0(t)$ передаточная функция такого фильтра определяется следующей формулой [6]:

$$K_0(j\omega) = \frac{V_0^*(j\omega)}{N_0(\omega)} \exp\{-j\omega t_0\}, \quad (11)$$

где $V_0(j\omega) \leftrightarrow v_0(t)$, t_0 — задержка (можно показать, что среднеквадратическое отклонение σ аддитивной гауссовой помехи на выходе оптимального фильтра с передаточной функцией (11) равно отношению сигнала-шум для полезного сигнала с единичной амплитудой $a = 1$ [6]).

Пусть $y_0(t)$ — случайный низкочастотный процесс на выходе оптимального фильтра с передаточной функцией (11). Тогда, учитывая, что $y_0(t) \leftrightarrow Y_0(j\omega) = K_0(j\omega)X_0(j\omega)$, из (10) и (11) находим:

$$\Lambda[x_0|a.\tau, \vartheta] \approx \exp \left\{ a \operatorname{Re} \left[e^{-j\vartheta} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Y_0(j\omega) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp \left\{ j\omega(t_0 + \tau) \right\} d\omega \right] - a^2 \sigma^2 / 2 \right\}. \quad (12)$$

При условии (9) случайный низкочастотный процесс $y_0(t)$ можно рассматривать как бигармонический. Поэтому, принимая во внимание свойства аналитического сигнала [7], запишем выражение (12) в виде

$$\Lambda[x_0|a.\tau, \vartheta] \approx \exp \left\{ a \operatorname{Re} \left[e^{-j\vartheta} z(t_0 + \tau) \right] - a^2 \sigma^2 / 2 \right\}. \quad (13)$$

Здесь

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty 2Y_0(j\omega) \exp \{j\omega t\} d\omega = R(t) \exp \{j\Psi(t)\}, \\ R(t) = \sqrt{y_0^2(t) + y_1^2(t)} \text{ и } \Psi(t) = \arctan y_1(t)/y_2(t) \quad (14)$$

— огибающая и фаза низкочастотного широкополосного сигнала $y_0(t)$; случайные процессы $y_0(t) = \operatorname{Re}[z(t)]$ и $y_1(t) = \operatorname{Im}[z(t)]$ связаны преобразованием Гильберта: $y_1(t) = (\pi t)^{-1} * y_0(t)$, $-\infty < t < \infty$. При «геометрической» интерпретации случайный процесс $R(t)$ можно рассматривать как огибающую двух квазигармонических процессов с резонансными частотами Ω_1 и Ω_2 . В режиме быстрой фильтрации без разделения этих колебаний по частоте, воспользовавшись теоремой отсчетов [7], находим:

$$z(t) = \Phi[\mathbf{y}_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_0(k\Delta t) \operatorname{sinc}[\chi_k(t)] \exp \{j\chi_k(t)\}, \\ y_0(t) = \Phi_0[\mathbf{y}_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_0(k\Delta t) \operatorname{sinc}[\chi_k(t)] \cos \chi_k(t), \\ y_1(t) = \Phi_1[\mathbf{y}_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_0(k\Delta t) \operatorname{sinc}[\chi_k(t)] \sin \chi_k(t), \quad (15)$$

где $\chi_k(t) = [(\omega_m/2)(t - k\Delta t)]$, $\Phi[\mathbf{y}_0]$ и $\Phi_{1,2}[\mathbf{y}_0]$ — линейные функционалы, $\mathbf{y}_0 = \{y_0(k\Delta t)\}$.

4. Анализ выражения (13) начнем с простейшей ситуации, для которой $\vartheta_0 = 0$ и $a = a_0$ и, следова-

тельно,

$$\Lambda[x_0|a_0, \tau] \approx \exp \{ a_0 y_0(t_0 + \tau) - a_0^2 \sigma^2 / 2 \}, \\ -\infty < a_0 < \infty.$$

При синтезе приемника-обнаружителя в условиях априорной неопределенности неизвестные параметры a_0 и τ заменяются максимально-правдоподобными оценками $\hat{a}_0 = y(t_m)/\sigma^2$ и $\hat{\tau} = t_m - t_0$, где t_m — положение временного максимума низкочастотного случайного процесса $y^2(t)$ на интервале наблюдения $(0, T)$: $y^2(t_m) = \max_t y^2(t)$. Следовательно, $\Lambda[x_0|\hat{a}_0, \hat{\tau}] \approx \exp \{(1/2)y^2(t_m)/\sigma^2\}$. Поэтому, учитывая, что выходной сигнал приемника-обнаружителя пропорционален логарифму функционала отношения правдоподобия, приходим к следующей схеме обработки информации:

$$x(t) \rightarrow x_0(t) \rightarrow \text{ОФ} \rightarrow y_0(t) \rightarrow \\ \rightarrow \text{НЭ} \rightarrow y_0^2(t) \rightarrow \max_{0 \leq t \leq T} y_0^2(t), \quad (16)$$

где ОФ — оптимальный фильтр с передаточной функцией (11), НЭ — нелинейный безынерционный элемент с параболической характеристикой. Схема (16) используется в [10] при обнаружении на фоне гауссовой помехи произвольного полезного сигнала, определенного с точностью до масштабного коэффициента.

5. Переходим к анализу общей ситуации, рассматривая начальную fazу ϑ как неизвестный неэнергетический параметр, $\vartheta \in (0, 2\pi)$. При синтезе приемника-обнаружителя, основанного на обобщенном критерии максимального правдоподобия, учитываем [9], что амплитуда a принимает только положительные значения, $a \geq 0$. Тогда из системы уравнений максимального правдоподобия находим:

$$\hat{a} = R(t_m)/\sigma^2, \quad R(t_m) = \max_{0 \leq t \leq T} R(t), \\ \hat{\tau} = t_m - t_0, \quad \hat{\vartheta} = \Psi(t_m), \quad (17)$$

где \hat{a} , $\hat{\tau}$ и $\hat{\vartheta}$ — максимально-правдоподобные оценки неизвестных параметров a , τ и ϑ . Принимая во внимание (13) и (17), получим: $\Lambda[x_0|\hat{a}, \hat{\tau}, \hat{\vartheta}] \approx \exp \{(1/2)R^2(t_m)/\sigma^2\}$. Следовательно, оптимальная схема когерентной обработки информации в режиме быстрой фильтрации может быть представлена в виде:

$$x(t) \rightarrow x_\Delta(t) \rightarrow \text{ОФ} \rightarrow y_0(t) \rightarrow \\ \rightarrow \underbrace{y_0^2(t) + y_1^2(t)}_{R^2(t)} \rightarrow \max_{0 \leq t \leq T} R^2(t). \quad (18)$$

При дискретной обработке информации квадрат огибающей $R^2(t)$ (14) можем выразить через отсчеты

y_0 случайного процесса $y_0(t)$ на выходе обеляющего фильтра:

$$R^2(t) = z(t)z^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_0(k\Delta t)y_0(m\Delta t) \times \\ \times \text{sinc}[\chi_k(t)] \text{sinc}[\chi_m(t)] \cos[(\pi/2)(m-k)]. \quad (19)$$

Заключение

1. Выражения (18) и (19) определяют оптимальный алгоритм когерентной (в смысле [6]) обработки информации в режиме быстрой фильтрации. «Тонкая структура» полезного бигармонического сигнала $s_0(t)$ на выходе преобразователя частоты учитывается при формировании с помощью преобразования Гильберта огибающей $R(t)$ низкочастотного широкополосного случайного процесса $y_0(t)$.

2. Итальянская группа при обработке выходного сигнала РГА «Explorger» в режиме быстрой фильтрации пользуется схемой обработки (16) [1]. Такая схема является оптимальной при $\vartheta = 0$. В общем случае применение такой схемы оказывается неоправданным из-за высокой чувствительности эффективности алгоритма обнаружения (16) к фазе ϑ (для идеализированной модели (6) гравитационного импульса к «фазе дельта-функции» $\varphi_\tau = m_0\omega_0\tau$ [1]) (в [1] фаза полезного сигнала предполагается известной).

3. Пусть $\hat{\tau}$ — эффективная длительность импульсного полезного сигнала $f_s(t) = \text{Re} [\tilde{f}_s(t) \exp\{j\omega_0 t\}]$ на входе РГА. Тогда при $\hat{\tau}\omega_x \ll 1$ (ω_x — максимальная частота в спектре комплексной огибающей $\tilde{g}(t)$ импульсной характеристики РГА) такой сигнал с комплексной огибающей $\tilde{f}_s(t)$ можно рассматривать как дельта-функцию. В этом случае полезный сигнал $s(t)$ на выходе РГА представляет собой узкополосный процесс с положительно определенной амплитудой $a \geq 0$, моментом возникновения $\tau \in (0, T)$ и неизвестной начальной фазой $\varphi_0 \in (0, 2\pi)$.

Идеализированная модель (6) приводит к физически необоснованному результату: «амплитуда» a_0 полезного сигнала $s(t)$ с нулевой начальной фазой может принимать отрицательные значения. Кроме этого непосредственное применение δ -функции в качестве внешнего воздействия предполагает, что $\omega_0\hat{\tau} \ll 1$, где ω_0 — резонансная частота РГА, $\omega_0 \gg \omega_x$. Это условие для реальных РГА (при $\omega_0/2\pi \approx 10^3$ Гц) не выполняется.

4. Характеристики обнаружения отдельных гравитационных импульсов в режиме быстрой фильтрации при оптимальном алгоритме обработки (15) определяются следующим выражением [6]:

$$\alpha = \exp\{-c^2/2\}, \quad c = C/\sigma, \quad D_1 = Q(q, c),$$

где α — вероятность ложной тревоги, C — пороговый уровень, D_1 — вероятность правильного обнаружения, $Q(u, v)$ — функция распределения Рэлея-Райса, $q = a\sigma$ — отношение сигнал-шум на выходе ОФ (как показывают результаты численного моделирования [10], эти формулы также можно использовать для приближенного вычисления характеристик обнаружения полезного сигнала с «амплитудой» $a = a_0$ и $\vartheta = 0$ по схеме (16)).

5. Асимптотическая оптимальность амплитудного обнаружения [6, 8], а также статистическая независимость гауссовых шумов в отдельных частотных каналах, делают режимы медленной и быстрой фильтрации статистически эквивалентными при больших отношениях сигнал-шум. При малых отношениях сигнал-шум коэффициент относительной эффективности ρ когерентного (в режиме быстрой фильтрации) и некогерентного (в режиме медленной фильтрации) алгоритмов обнаружения определяется следующим выражением:

$$\rho^{-1} = \sqrt{1 - 2 \left(\frac{q_1 q_2}{q_1^2 + q_2^2} \right)^2},$$

где q_1 и q_2 — отношения сигнал-шум в отдельном частотном канале. При $q_1 = q_2$ $\rho = \sqrt{2}$ (подобный результат в [1] сохраняется и при больших отношениях сигнал-шум как следствие неоптимальной обработки векторного сигнала $\mathbf{E}(t)$ в режиме медленной фильтрации).

Литература

- Astone P., Buttiglione C., Frasca S. et al. // Il Nuovo Cimento. 1997. **20C**. P. 9.
- Mauceli E., Solomonson N., Geng Z.K. et al. // Phys. Rev. 1996. **D54**. P. 1264.
- Blair D.G., Ivanov E.N., Todar M.E. et al. // Phys. Rev. Lett. 1995. **74**. P. 1908.
- Bonzini F., Carelli P., Castellano M.G. et al. // Il Nuovo Cimento. 1985. **8C**. P. 300.
- Гусев А.В., Кулагин В.В., Орешкин С.И., Руденко В.Н. и др. // Астрон. журн. 1997. **74**, № 2. С. 287.
- Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М., 1992.
- Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М., 1986.
- Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А. и др. Теория обнаружения сигналов. М., 1984.
- Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. М., 1983.
- Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез неопределенности и адаптация информационных систем. М., 1977.

Поступила в редакцию
21.05.03