

ГЕОФИЗИКА

УДК УДК 551.466

ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ТЕОРИИ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН
НА ВОДЕ

С. А. Арсеньев, Н. К. Шелковников

(кафедра физики моря и вод суши)

Исследовано эволюционное уравнение теории длинных нелинейных волн на воде во втором приближении. Полученное решение объясняет лабораторные наблюдения.

Сильно нелинейные, уединенные и кноидальные волны на воде, представляющие двумерные смещения h поверхности слоя жидкости глубиной H в зависимости от горизонтальной координаты x и времени t , обычно описываются уравнением Кортевега–де Фриза (КдФ) [1]. Оно является первым приближением уравнений гидродинамики потенциальных движений жидкости в поле силы тяжести по параметрам амплитудной $\alpha = A/H$ и фазовой $\beta = H^2/\lambda^2$ дисперсий (здесь A — амплитуда и λ — длина волны, H — невозмущенная глубина) [1, 2]. Сравнение экспериментальных данных с результатами расчетов по теории КдФ, проведенное в работах [3, 4], показало, что эта теория в целом хорошо описывает наблюдения, однако, в ряде случаев имеют место заметные расхождения результатов расчетов и опытов. В работе [3] наблюдали более узкие, а в работе [4] — более широкие уединенные волны, по сравнению с солитонами КдФ.

Для объяснения подобных отклонений авторами данной работы были поставлены эксперименты по наблюдению уединенных волн. Они проводились в лабораторном канале с размерами $330 \times 30 \times 15$ см. Уединенные волны возбуждались поршневым генератором с прямоугольной пластинкой, совершающей поступательное движение вдоль оси канала. При зарядке генератора поршень сдвигался назад до определенной степени сжатия пружины и фиксировался в этом положении с помощью нити, которой он привязывался к корпусу. Степень сжатия пружины измерялась. Затем нить перерезалась, и под действием пружины поршень двигался вперед со скоростью V_p , выталкивая находящуюся вблизи него массу воды, которая сразу же принимала форму уединенной волны. Она фотографировалась видеокамерой на фоне координатной сетки, укрепленной на прозрачных боковых стенках канала на расстоянии 150 см от генератора. Полученные видеофильмы обрабатывались на компьютере.

На рисунке, $a, b, в$ кружками показаны результаты измерений. Буквам a, b и $в$ соответствуют различные опыты, в которых варьировались глубина канала H и амплитуда A уединенных волн (т. е. их амплитудная дисперсия $\alpha = A/H$), а также скорость

движения поршня V . Кривая 2 на всех картинках представляет собой классический солитон КдФ, рассчитанный по формуле

$$h = A \operatorname{sech} h^2[(x - c_s t)/\lambda], \quad c_s = c_0(1 + \frac{A}{2H}). \quad (1)$$

Здесь h — отклонения уровня поверхности воды от невозмущенного состояния, $\lambda = (4H)^3/3A$ — ширина солитона, $c_0 = (gH)^{1/2}$ — лагранжева скорость линейных гравитационных волн, c_s — скорость движения солитона КдФ, x и t — размерные продольная координата и время, g — ускорение силы тяжести. Из рисунка, a, b и $в$ мы видим, что измеренная форма уединенных волн (кружки) заметно отличается от солитонов КдФ (кривая 2).

Будем исходить из эволюционного уравнения второго приближения теории уединенных волн, полученного авторами [2, 5–7], с сохранением членов не только порядка α и β (как в теории КдФ), но и $\alpha^2, \alpha\beta$:

$$\zeta_T + \zeta_X + \frac{3}{2}\alpha\zeta\zeta_X + \frac{\beta}{6}\zeta_{3X} - \frac{3}{8}\alpha^2\zeta_X + \frac{5}{12}\alpha\beta(\zeta\zeta_{3X} + 2\zeta_X\zeta_{2X}) = 0. \quad (2)$$

Здесь введены безразмерные переменные $\zeta = h/A$, $T = tc_0/\lambda$, $X = x/\lambda$, а обозначения $\zeta_T, \zeta_{2X}, \dots$ соответствуют производным $\partial\zeta/\partial T, \partial^2\zeta/\partial X^2, \dots$.

Введем обозначения:

$$\xi = -\zeta, \quad k = \frac{3}{2}\alpha, \quad n = \frac{3}{8}\alpha^2, \quad l^2 = \frac{\beta}{6}, \quad m = \frac{5}{12}\alpha\beta \quad (3)$$

и умножим (2) на -1 . Используя (3) из (2), получим $\xi_T + \xi_X - k\xi\xi_X - n\xi^2\xi_X + l^2\xi_{3X} - m(\xi\xi_{3X} + 2\xi_X\xi_{2X}) = 0$. (4)

Будем искать решение (4) в виде стационарных уединенных волн

$$\xi = \Theta(s), \quad s = X - vT, \quad (5)$$

где $v = c/c_0$ — их относительная скорость и $\Theta(s)$ — неизвестная функция, определяющая форму волны. Подставляя (5) в (4), найдем

$$(v-1)\Theta_s + \frac{k}{2}(\Theta^2)_s + \frac{n}{3}(\Theta^3)_s - l^2\Theta_{3s} + m(\Theta\Theta_{3s} + 2\Theta_s\Theta_{2s}) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6), используя легко проверяемые тождества

$$\Theta_s \Theta_{2s} \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{ds} [(\Theta_s)^2], \quad \frac{d}{ds} (\Theta \Theta_{2s}) \equiv \Theta_s \Theta_{2s} + \Theta \Theta_{3s},$$

удобно переписать в виде

$$(v-1)\Theta_s + \frac{k}{2}(\Theta^2)_s + \frac{n}{3}(\Theta^3)_s - l^2\Theta_{3s} + m \frac{d}{ds} \left[\Theta \Theta_{2s} + \frac{1}{2}(\Theta_s)^2 \right] = 0$$

и один раз проинтегрировать по переменной s :

$$(v-1)\Theta + \frac{k}{2}\Theta^2 + \frac{n}{3}\Theta^3 - l^2\Theta_{2s} + m \left[\Theta \Theta_{2s} + \frac{1}{2}(\Theta_s)^2 \right] + C_1 = 0. \quad (7)$$

При изучении решений, соответствующих уединенным волнам, постоянную интегрирования C_1 надо взять равной нулю, так как возмущение уровня Θ должно исчезать на бесконечности.

Введем новые переменные

$$\theta = \frac{k(-\eta)}{3(v-1)}, \quad p = \frac{\sqrt{|(v-1)|}}{2l}s \quad (8)$$

и обозначим

$$\delta = \frac{3(v-1)m}{kl^2}. \quad (9)$$

Используя (8) и (9), запишем (7) в виде

$$(1-\delta\theta)\theta_{2p} - \frac{\delta}{2}(\theta_p)^2 - \frac{2}{5}\delta\theta^3 - 6\theta^2 - 4\theta = 0. \quad (10)$$

Умножим (10) на θ_p и проинтегрируем. Получим

$$\frac{1}{2}(\theta_p)^2 - \delta \int \theta \theta_p \theta_{2p} dp - \frac{\delta}{2} \int (\theta_p)^3 dp - \frac{\delta}{10}\theta^4 - 2\theta^3 - 2\theta^2 = 0, \quad (11)$$

поскольку

$$\int \theta_p \theta_{2p} dp \equiv \frac{1}{2}(\theta_p)^2,$$

а также имеет место равенство

$$\int (\theta_p)^3 dp = -2 \int \theta \theta_p \theta_{2p} dp + \theta(\theta_p)^2,$$

интегралы в (11) вычисляются:

$$-\delta \left[\int \theta \theta_p \theta_{2p} dp + \frac{1}{2} \int (\theta_p)^3 dp \right] = \frac{1}{2}\theta(\theta_p)^3.$$

Таким образом, результат интегрирования (11) имеет вид

$$\theta_p = \sqrt{\frac{\delta\theta^4 + 20\theta^3 + 20\theta^2}{5(1-\delta\theta)}}, \quad (12)$$

причем постоянную интегрирования мы полагаем равной нулю, так как возмущение уровня θ , обусловленное уединенной волной, должно исчезать на

бесконечности. Из (12) после разделения переменных находим

$$p = \int \sqrt{\frac{5(1-\delta\theta)}{\delta\theta^2 + 20\theta + 20}} \frac{d\theta}{\theta}. \quad (13)$$

Ограничимся далее асимптотикой $v \rightarrow 1$ реализуемой на практике в случае, когда скорость уединенной волны c мало отличается от лагранжевой скорости линейных волн $c_0 = (gH)^{1/2}$. Вблизи генератора скорость движения уединенной волны c и скорость движения поршня V_p должны совпадать. Таким образом, принимая приближение $O(v) = O(c/c_0) = O(V_p/c_0) = 1$ мы должны далее следить за его выполнением.

При $v \rightarrow 1$, $\delta = 5(v-1) \rightarrow 0$ интеграл (13) можно записать в форме

$$p = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{1}{1+\theta}} \frac{d\theta}{\theta}.$$

Отсюда следует

$$p = -\text{Arth}(\sqrt{1+\theta}). \quad (14)$$

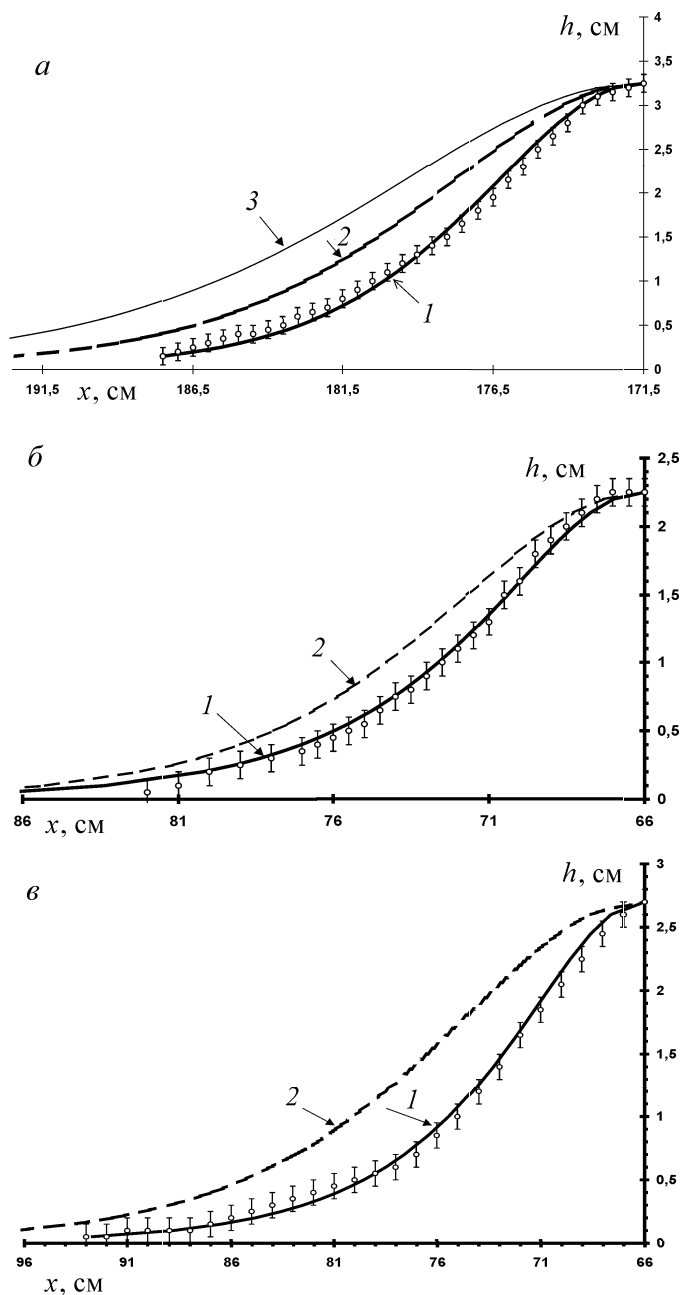
Из (14), учитывая, что $\text{th}^2 p + \sec^2 p \equiv 1$, находим формулу $\vartheta = -\sec^2 p$, которая в размерном виде выглядит следующим образом:

$$h = A \sec^2 h^2 \left[\frac{\sqrt{6|v-1|}}{2H} (x-ct) \right]. \quad (15)$$

Решение (15), определяющее уединенную волну, позволяет вычислить возмущение уровня поверхности воды h по измеренным значениям H, A и $c = V_p$. Отметим, что при $c = c_s$ формула (15) переходит в классический солитон КдФ, определяемый формулой (1). Однако вблизи генератора, где выполнялись наблюдения, уединенная волна движется со скоростью движения поршня $c = V_p$, которая не обязательно совпадает со скоростью солитонов КдФ.

На рисунке, *а* кривыми 1, 2, 3 показаны результаты расчетов трех уединенных волн с амплитудой $A = 3.25$ см, бегущих в канале с глубиной $H = 6$ см. Кривая 2 соответствует классическому солитону (2), который движется со скоростью $c_s = 97.5$ см/с. Поскольку широта Москвы $\varphi = 55.8^\circ$ с.ш., то $g = 981.57$ см/с². Таким образом, $c_0 = (gH)^{1/2} = 76.7$ см/с. Кривая 1, совпадающая с экспериментальными данными, рассчитана по формуле (15) при $A = 3.25$ см, $H = 6$ см и $c = V_p = 112.2$ см/с. Наконец, кривая 3 на рисунке, *а*, идущая выше солитона КдФ, рассчитана по формуле (15) при $A = 3.25$ см, $H = 6$ см и $c = V_p = 87.8$ см/с.

На рисунке, *б* показаны аналогичные рисунку, *а* расчеты для уединенной волны с амплитудой $A = 2.25$ см, распространяющейся в канале с глубиной $H = 6$ см. В данном примере $c = V_p = 126.1$ см/с, $c_s = 85.8$ см/с и $c_0 = (gH)^{1/2} = 70.1$ см/с. Наконец,



Расчет уединенных волн (кривые 1, 2, 3) и данные наблюдений (кружки). Вариант *a* — в канале с глубиной $H = 6$ см бежит волна с амплитудой $A = 3.25$ см. Вариант *б* — в канале с глубиной $H = 6$ см бежит волна с амплитудой $A = 2.25$ см. Вариант *в* — в канале с глубиной $H = 7$ см бежит волна с амплитудой $A = 2.7$ см

на рисунке, *в* показана уединенная волна с амплитудой $A = 2.7$ см, бегущая в канале с глубиной $H = 7$ см со скоростью $c = V_p = 165.8$ см/с (кривая 1). Кривая 2 здесь соответствует солитону КдФ, бегущему со скоростью $c_s = 114.9$ см/с. Скорость линейных волн для примера, изображенного на рисунке, *в* $c_0 = (gH)^{1/2} = 82.8$ см/с.

Резюмируя статью подчеркнем, что наблюдаемое сужение уединенных волн по сравнению с теорией КдФ, объясняется тем, что реальная скорость движения уединенных волн c , задаваемых скоростью движения поршня генератора солитонов V_p , превышает теоретическую скорость солитонов КдФ, т. е. $c = V_p > c_s$. Если же скорость движения поршня генератора V_p и скорость уединенных волн c меньше скорости солитонов КдФ ($c = V_p < c_s$) то возникают более широкие уединенные волны. Имеет место неравенство $c_0 = (gH)^{1/2} < c_s < c = V_p$. Из приведенных данных видно, что условие $O(v) \approx 1$, при котором справедливо решение (15), в экспериментах выполняется. Рассчитанные теоретические кривые 1 на рисунке, *a*, *б*, *в*) совпадают с экспериментальными данными. Таким образом, второе приближение в теории уединенных волн [2] уточняет классическую теорию Кортевега–де Фриза [1].

Авторы благодарят профессора В. Н. Николаевского и профессора Доминика Реноурда (Франция) за обсуждение проблем, затронутых в статье.

Литература

1. Korteweg D.J., de Vries G. // *Phil. Mag.* 1895. **39**. P. 422.
2. Арсеньев С.А. // *ДАН.* 1994. **334**, № 5. С. 635.
3. Анекишева К.И., Рейхрудель А.Е. // *Труды СахКНИИ.* 1973. № 32. С. 188.
4. Renouard D.P., Seabra Santos F.J., Temperville A.M. // *Dynamics of the Atmospheres and Oceans.* 1985. **9**. P. 341.
5. Arrsen'ev S.A., Gubarr A.Y. // *Ocean Modelling.* 1995. Iss. 106. P. 2.
6. Арсеньев С.А., Губарь А.Ю., Шелковников Н.К. // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 1998. № 1. С. 46.
7. Арсеньев С.А., Вахрушев М.М., Шелковников Н.К. // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 1996. № 4. С. 81.

Поступила в редакцию
08.11.00

Переработана 07.02.03