ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 535.12.01

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ЗАРЯЖЕННОЙ БРОУНОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ С УЧЕТОМ РАДИАЦИОННОГО ТРЕНИЯ

Ал. А. Власов

(*кафедра квантовой теории и высоких энергий*)

В работе получено уравнение движения центра масс броуновски «размазанной» электрически заряженной неквантовой частицы. Выяснено, что решения этого уравнения физически правильно описывают эффекты радиационной отдачи для нерелятивистски движущегося тела конечных размеров.

1. Из классической электродинамики известно, что движущееся с ускорением заряженное тело («частица», «пылинка», «песчинка»...) должно излучать электромагнитные волны и, следовательно, испытывать обратную отдачу излучения. Как учесть такую отдачу в классических уравнениях движения тела?

Проблеме учета радиационной отдачи вот уже более ста лет (если их считать от трудов Г. Лоренца и М. Абрагама [1]), однако до сих пор она дискутируется в литературе и печатаются статьи как по квантовым аспектам проблемы, так и по классическим [2–4].

Как решать проблему?

Здесь возможны два основных пути:

а) отнести проблему «точечности» к области не классической теории, а квантовой и, следовательно, рассматривать модели взаимодействия частицы и ее излучения в рамках квантовых представлений;

б) остаться в рамках классической теории (считая вслед за Дираком [2], что проблема радиационной отдачи не требует привлечения квантового подхода), но отказаться от «точечности» и рассматривать классические объекты малой протяженности (например, заряженные пылинки космической пыли, пылевую плазму, броуновские частицы с зарядом и т. п.).

В своих работах, посвященных радиационной тематике [4], автор придерживается второго подхода, т. е. рассматривает уравнения движения классического (не квантового) протяженного тела с учетом радиационной отдачи.

В настоящей статье рассматривается, как скажется на эффекте радиационной отдачи возникновение «протяженности» у заряженной частицы вследствие ее классического броуновского «дрожания» под действием некоторой внешней стохастической силы. Будет получено уравнение движения «центра масс» «дрожащей» частицы с учетом самодействия в нерелятивистском приближении.

2. Напомним, что точное выражение для электрического поля $\mathbf{E}$ некоторого заряженного движущегося тела можно, используя закон сохранения заряда, представить в виде бесконечного ряда по запаздыванию (по $1/c$) [5].

Для сферически симметричного распределения заряда тела, $\rho = \rho(t, |\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)|)$, этот ряд, усредненный по всем направлениям, можно свернуть так:

$$<\mathbf{E}> = -\frac{2}{3Qc^2}\int d\mathbf{r}\,\rho(t,\mathbf{r})\times \times\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c},\mathbf{r}'\right), \tag{1}$$

где $\mathbf{R}(t)$ — траектория тела. Это выражение — точное для сферически симметричного распределения заряда.

Упростим его для нерелятивистского приближения.

Пусть рассматриваемое тело — жесткое, т. е.

$$\mathbf{j}(t_{\mathrm{ret}}, \mathbf{r}') = \rho(t_{\mathrm{ret}}, \mathbf{r}')\cdot\mathbf{v}(t_{\mathrm{ret}}) \tag{2}$$

где $t_{\mathrm{ret}} \equiv t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$ — запаздывающее время.

Оставим запаздывание только в аргументе у скорости в (4) и пренебрежем им в аргументе у плотности заряда:

$$\rho(t_{\mathrm{ret}}, \mathbf{r}') \approx \rho(t, \mathbf{r}'). \tag{3}$$

Это означает, что разложение в ряд Тейлора по $c\to\infty$ (разложение по запаздыванию) для скорости более существенно, чем для плотности заряда, т. е.

$$v\frac{\partial}{\partial t}\rho \ll \rho\frac{\partial}{\partial t}v \sim \rho F_{\mathrm{ext}}/m. \tag{4}$$

Если T_ρ — характерное время изменения плотности, а T_v — характерное время изменения скорости, то это неравенство можно записать и так: $T_v \ll T_\rho$. Неравенство (4) допускает и такую интерпретацию. Вследствие закона сохранения заряда $\frac{\partial}{\partial t}\rho = -(\nabla, \mathbf{j}) \sim \rho v$ условия (3), (4) можно назвать условиями линеаризации по скорости — когда мы оставляем члены, линейные по скорости и ее производным по времени, а остальными членами, содержащими всевозможные произведения скорости и ее производных, пренебрегаем.

Тогда в уравнении (1) производную по времени можно внести под интеграл и, учитывая (2), (3) и (4), перенести на скорость. Это дает следующее выражение для усредненного поля:

$$<\mathbf{E}> = -\frac{2}{3Qc^2}\int d\mathbf{r}'d\mathbf{r}\cdot\frac{\rho(t,\mathbf{r})\rho(t,\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\times \times\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right). \tag{5}$$

Выражение (5), умноженное на величину заряда Q, совпадает с выражением для силы самодействия, полученным в методе Джексона [5] в так называемом нерелятивистском (или квазирелятивистском) приближении (вклад силы Лоренца в силу пропорциональности магнитного поля скорости тела в рассматриваемом приближении равен нулю).

Заметим, что, обобщая результат Джексона, в (5) можно рассматривать изменяющуюся во времени плотность заряда при выполнении неравенства (4).

3. Перейдем теперь к изучению движения заряженной броуновской частицы. Будем рассматривать такие промежутки времени T_v, $T_v \gg T_{Br}$, (T_{Br} — время между двумя столкновениями броуновской частицы), для которых возможно вести описание через функцию распределения.

Пусть $n(t,\mathbf{r})$ — вероятность обнаружения броуновской частицы в объеме $d\mathbf{r}$ в момент времени t, т. е. n — функция распределения с нормировкой $\int n(t,\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = 1$. Эта функция подчиняется закону сохранения

$$\frac{\partial n}{\partial t} + div\ n\mathbf{V} = 0, \tag{6}$$

где $\mathbf{V}$ — полная скорость движения броуновской частицы.

Пусть это движение складывается из двух: со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ под действием заданной регулярной (не стохастической) внешней силы $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ и броуновской диффузии (возникающей под действием некоторой стохастической внешней силы, происхождение которой нас здесь не интересует) со скоростью $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = -\frac{D}{n}\nabla n, \tag{7}$$

где D — коэффициент диффузии.

Таким образом, вокруг регулярной траектории происходит типичное броуновское «дрожание», при этом значение среднего от квадрата отклонения частицы от регулярной траектории (т. е. значение квадрата радиуса «броуновской размазаности» частицы) будет по формуле Эйнштейна пропорционально Dt.

Уравнение (6) с учетом (7) принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla)n = D\nabla^2 n. \tag{8}$$

Так как в силу сделанного предположения «центр масс» броуновской частицы движется со скоростью $\mathbf{v} = d\mathbf{R}(t)/dt$, то функция распределения задает вероятность отклонения частицы от траектории ее центра масс, причем $n = n(t,\mathbf{r}-\mathbf{R}(t))$. Подстановка данного соотношения в (1) с учетом возникающего равенства

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\left(\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt},\nabla\right)n + \left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{\mathbf{R}=\text{const}}$$

приводит к следующему уравнению для функции n:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{\mathbf{R}=\text{const}} = D\nabla^2 n \tag{9}$$

Это есть типичное уравнение Фоккера–Планка для функции распределения броуновской частицы, которое с учетом нормировки и начального условия $n(0,\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}(0))$ имеет решение

$$n(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}}\exp\left(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{R}(t)|^2}{4Dt}\right) \tag{10}$$

(см., например, [6]).

Для учета влияния радиационной отдачи на броуновскую частицу ньютоново уравнение движения центра масс $\mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}(t)}{m}$ дополним силой самодействия (5), где сферически симметричная плотность заряда $\rho = Q\cdot n$.

Таким образом, уравнение движения центра масс частицы $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ с учетом самодействия будет в нерелятивистском приближении равно

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}(t)}{m} - \frac{2Q^2}{3mc^2}\times \times\iint d\mathbf{r}d\mathbf{r}'\,\frac{n(t,\mathbf{r})n(t,\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{a}\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right). \tag{11}$$

Используя результат (10) для функции распределения, вводя новые безразмерные переменные x и y с помощью соотношений

$$\mathbf{r}-\mathbf{R}(t) \equiv \mu; \quad |\mu| \equiv \sqrt{4Dt}x;$$
$$\mathbf{r}'-\mathbf{R}(t) \equiv \nu; \quad |\nu| \equiv \sqrt{4Dt}y$$

и учитывая сферическую симметрию, уравнение (11) можно в итоге привести к виду

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{F}_{ext}(t)}{m} - \frac{4Q^2}{3\pi mc}\cdot\frac{1}{Dt}\times \times\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty dxdy\,xy\exp(-x^2-y^2)\times \times\left[\mathbf{v}\left(t-\frac{\sqrt{4Dt}}{c}|x-y|\right) - \mathbf{v}\left(t-\frac{\sqrt{4Dt}}{c}|x+y|\right)\right]. \tag{12}$$

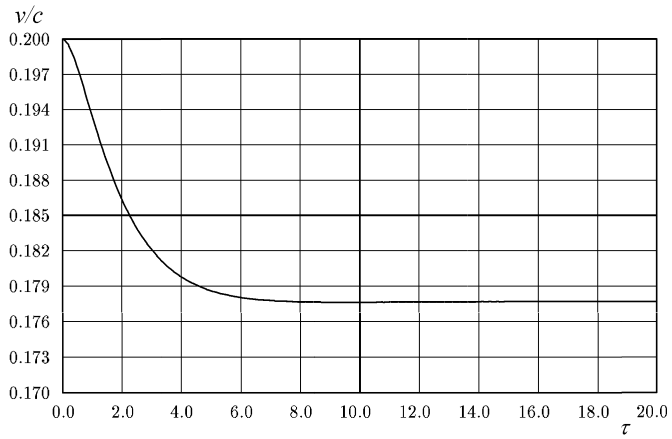
Итак, уравнение (11) (или (12)) учитывает влияние броуновской размазанности (по грубой шкале времени $T_{Br} \ll T_v \ll T_\rho$) на движение заряженной частицы с учетом радиационной отдачи в нерелятивистском приближении.

Это уравнение отличается от традиционного нерелятивистского уравнения Абрагама–Лоренца–Дирака, но имеет некоторые общие черты с уравнениями, возникающими в моделях протяженных частиц.

Сразу можно отметить такие свойства уравнения (11) (или (12)).

1) Из уравнения (11) следует, что при $\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ ускорение свободного движения $\mathbf{a}$ в данный момент времени пропорционально ускорениям во все предыдущие моменты времени, следовательно, если «начальное» ускорение (с которого и начинается расчет) равно нулю, то и во все последующие моменты времени оно нулевым и останется. Таким образом, свободные решения уравнения (11) не содержат саморазгоняющихся решений. Это — общее свойство линейных уравнений с запаздыванием вида (11).

2) Уравнение (12) обладает экспоненциальным затуханием в отсутствие внешней силы. Действительно, численное интегрирование уравнения (12) дает следующее: на рисунке изображено затухание скачкообразного изменения начальной скорости частицы, полученное численным интегрированием (12). На вертикальной оси отложена безразмерная скорость движения частицы v/c (которая скачкообразно, при $\delta t < t < 0$, изменила свою начальную скорость $v/c = 0.1$ до значения $v/c = 0.2$ ($\delta t = 0.01 \times \times (M/c)$, $M = 4D/c$ — масштабный множитель)). На горизонтальной оси отложено безразмерное время $\tau = ct/M$, $t > 0$. Величины заряда частицы Q, ее массы m, а также коэффициента диффузии D для простоты выбраны удовлетворяющими соотношению $k = \frac{4Q^2}{3\pi mcD} = 1.0$.



3) Если подынтегральное выражение в уравнении (12) разложить в ряд по запаздыванию: $t \gg \frac{\sqrt{4Dt}}{c}|x \pm y|$, то получим

$$\mathbf{F}_{\text{self}}/m \approx -\dot{\mathbf{v}}(t)\frac{m_{\text{em}}}{m} + \frac{2Q^2}{3mc^3}\ddot{\mathbf{v}}(t) + \ldots, \qquad (13)$$

где второе слагаемое представляет собой классический результат Лоренца для радиационной отдачи, а эффективная электромагнитная масса m_{em}, входящая в первое слагаемое, равна

$$\frac{Q^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{Dt}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \qquad (14)$$

и стремится к нулю с ростом времени t ($t \to \infty$).

4. Итак, мы выяснили, что учет броуновской размазанности частицы (в соответствующем временном масштабе), с одной стороны, приводит к ясным физическим следствиям радиационной отдачи, а с другой — позволяет обойти классические сложности, связанные с использованием понятия точечности частицы.

Отметим, что идея о появлении у точечной частицы эффективной размазанности за счет флуктуационных колебаний (броуновских или вакуумных), что позволяет, в частности, на полуклассическом уровне объяснить лэмбовский сдвиг, отнюдь не нова — см., например, обсуждение лэмбовского сдвига уровней в параграфе 22 книги [7]. В более общем случае идеи о нелокальности высказаны в монографиях профессора МГУ А. А. Власова [8]. В нашей работе идея флуктуационной размазанности использована для учета радиационной отдачи в уравнении движения частицы, что привело к уравнению (11). Оно — интегро-дифференциальное с запаздыванием. Поэтому наряду с решениями, физически традиционными для эффектов радиационной отдачи, может иметь так называемые «туннельные» решения («подбарьерные»), типичные для моделей заряженных пылинок конечных размеров [4]. Но, конечно, это утверждение еще нуждается в счетной проверке.

Литература

1. *Lorentz H.* The Theory of Electron. Leipzig: Teubner, 2nd edition, 1916; *Abragam M.* Electromagnetische Theorie der Strahlung. Leipzig: Teubner, 1905.
2. *Dirac P.* // Proc. Roy. Soc. 1938. **A167**. P. 148.
3. *Клепиков Н.П.* // УФН. 1985. **146**. С. 317; *Parrott S.* Relativistic Electrodynamics and Differential Geometry. N. Y.: Springer-Verlag, 1987; *Erber T.* // Fortschr. Phys. 1961. **9**. P. 342; *Pearle P.* // Electromagnetism / Ed. D. Tepliz. N. Y.: Plenum, 1982. P. 211; *Yaghjian A.* Relativistic Dynamics of a Charged Sphere: Lecture Notes in Physics. Vol. 11. Berlin: Springer, 1992.
4. *Власов Ал.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 5. С. 17; 2001. № 6. С. 15. *Vlasov Al.A.* // Photon: old problems in light of new ideas / Ed. V.V. Dvoeglazov. N. Y.: Nova Sci. Publ., 2000. P. 126; E-print Archive: physics/9911059; physics/9912051; physics/0004026; physics/0103065; physics/011003; physics/0205012.
5. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М., 1985; *Власов А.А.* Дополнительные главы классической электродинамики. Проблемы радиационной отдачи. М., 2002.
6. *Квасников И.А.* Термодинамика и статистическая физика. Ч. 2. М., 1988.
7. *Соколов А.А., Лоскутов Ю.М., Тернов И.М.* Квантовая механика. М., 1962.
8. *Власов А.А.* Теория многих частиц. М., 1950; Нелокальная статистическая механика. М., 1978.

Поступила в редакцию
18.02.03