

РАДИОФИЗИКА

УДК 537.52

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ РАЗРЯДНОЙ КАМЕРЕ

Е. В. Берлин, С. А. Двинин, В. В. Михеев, М. О. Омаров, В. С. Свиридкина

(кафедра физической электроники)

E-mail: dvinin@ph-elec.phys.msu.su

В гидродинамическом приближении с учетом процессов ионизации рассмотрена задача о распределении плотности плазмы в двумерно неоднородном положительном столбе газового разряда. Найдены точные стационарные решения для разряда в прямоугольной и цилиндрической разрядных камерах в двумерном потенциальном приближении при учете инерции ионов. Показано, что для потенциальных течений нормальная к границе составляющая скорости плазмы равна ионно-звуковой скорости. Полученные результаты могут быть использованы при анализе процессов в плазмохимических реакторах низкого давления.

В последнее время как в космической технике, так и в технологии микроэлектроники используются источники плазмы, работающие при низком давлении плазмообразующего газа. При этом длина свободного пробега ионов может быть близка к характерному размеру системы. Существующие модели положительного столба газового разряда, как кинетические [1–5], так и гидродинамические [2, 6, 7] предполагают, что плазма неоднородна только в одном направлении. В то же время в технологических источниках плазмы, в которых принципиально важна однородность ионного потока на стенку для обеспечения равной скорости химической обработки, поперечный и продольный размеры плазмы оказываются одного порядка.

Постановка задачи

В настоящей работе мы получим ряд возможных распределений плотности плазмы в пространстве в гидродинамическом приближении для плазмы в цилиндрической разрядной камере. Пусть плазма ограничена поверхностью S . Будем исходить из системы уравнений одножидкостной гидродинамики, учитывающей рождение электрон-ионных пар в разряде в результате ионизирующих столкновений электронов с атомами

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{V}) = n\nu_i, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -V_S^2 \frac{\nabla n}{n} - \nu_{in}\mathbf{V}. \quad (2)$$

Здесь и ниже n — плотность заряженных частиц (положительный столб предполагается квазинейтральным), $\mathbf{V} = (u, v, w)$ — гидродинамическая скорость течения плазмы, $V_S = \sqrt{T_e/M}$ — скорость ионного звука, T_e — температура электронов в энергетических единицах, которая предполагается постоянной, M — масса иона, ν_i — частота

ионизации в плазме, ν_{in} — частота столкновений ион-нейтрал, t — время, $\mathbf{R} = (x, y, z)$ — координаты точки пространства.

Уравнения (1) и (2) должны быть дополнены граничными условиями. В одномерной задаче в квазинейтральном приближении, когда радиус Дебая много меньше характерных размеров системы, а на стенке происходит рекомбинация плазмы, в качестве граничного условия используют критерий Бома [8], гласящий, что скорость течения плазмы на стенку равна ионно-звуковой. При этом на границе выполняется условие

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0,$$

означающее нарушение условий взаимно-однозначного соответствия координат и скоростей. Физически в этой точке характерный размер неоднородности плазмы становится равным радиусу Дебая и происходит формирование слоя пространственного заряда [1, 8] (этот процесс не может быть рассмотрен в квазинейтральном приближении). В двумерной задаче скорость течения плазмы может быть направлена под углом к границе. Можно ожидать, что в большинстве задач условия образования слоя аналогичны условиям формирования косоугольного скачка уплотнения при малых числах Маха в гидродинамике, т. е. нормальная к границе компонента скорости ионов должна быть равна локальной скорости звука [9–11]. В настоящей работе будет показано, что для плоской и цилиндрической задач это условие также эквивалентно нарушению условий взаимно-однозначного соответствия координат и скоростей, которое означает равенство нулю якобиана*)

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \{x_u y_v - x_v y_u\} = 0, \quad (3)$$

*) Здесь и далее a_b означает частную производную функции a по переменной b , как это принято в гидродинамике.

и использовано при решении задачи (1)–(2). Будем решать задачу о течении плазмы так, как это делается в обычной гидродинамике [9, 10], ограничившись в данной работе классом двумерных стационарных потенциальных течений. Существование потенциальных течений следует из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{V} - \operatorname{rot}[\mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V}] = -\nu_{\text{in}} \operatorname{rot} \mathbf{V}.$$

Течение будем считать плоским ($\mu = 0$) или осесимметричным ($\mu = 1$, при этом координата y имеет смысл расстояния от оси), симметричным относительно начала координат. В этом случае система уравнений (1)–(2) сводится к виду

$$v_x - u_y = 0, \quad (4)$$

$$(u^2 - V_S^2) u_x + uv(v_x + u_y) + (v^2 - V_S^2) v_y = \frac{\mu}{y} V_S^2 v - \nu_i V_S^2 - \nu_{\text{in}} (u^2 + v^2). \quad (5)$$

Применяя к системе (4), (5) преобразование годографа [8, 9], получим

$$x_v - y_u = 0, \quad (6)$$

$$(u^2 - V_S^2) y_v - uv(y_u + x_v) + (v^2 - V_S^2) x_u = \left\{ \frac{\mu}{y} V_S^2 v - \nu_{\text{in}} (u^2 + v^2) - \nu_i V_S^2 \right\} \{x_u y_v - x_v y_u\}. \quad (7)$$

В отличие от обычных гидродинамических движений плазмы, не содержащих ионизации, уравнение (7) оказывается нелинейным как для плоских, так и для осесимметричных течений. Дальнейшее упрощение системы уравнений (6), (7) связано с введением потенциала Лежандра Φ , который мы определим таким образом, чтобы итоговое уравнение было безразмерным, вводя новые переменные

$$U = \frac{u}{V_S}, \quad V = \frac{v}{V_S},$$

$$x = \frac{V_S}{\nu_i} X = \frac{V_S}{\nu_i} \Phi_U(U, V), \quad y = \frac{V_S}{\nu_i} Y = \frac{V_S}{\nu_i} \Phi_V(U, V),$$

где U, V — безразмерные скорости, нормированные на ионно-звуковую, X, Y — безразмерные координаты, $\zeta = \nu_{\text{in}}/\nu_i$. Уравнение (7) принимает вид

$$(1 - U^2) \Phi_{VV} + 2UV \Phi_{UV} + (1 - V^2) \Phi_{UU} = \left\{ 1 + \zeta (U^2 + V^2) - \frac{\mu}{\Phi_V} V \right\} \{ \Phi_{UU} \Phi_{VV} - \Phi_{UV}^2 \} \quad (8)$$

Положение границы определяется уравнением

$$\{ \Phi_{UU} \Phi_{VV} - \Phi_{UV}^2 \} = 0.$$

Плотность заряженных частиц может быть получена из интеграла, обобщающего интеграл Бернулли (n_0 — плотность плазмы в начале координат, где $U = V = 0$, $\Phi = 0$)

$$n = n_0 \exp \left(-\frac{U^2 + V^2}{2} - \zeta (U \Phi_U + V \Phi_V - \Phi) \right).$$

Одномерно неоднородные решения

Для одномерно неоднородной плазмы в случае ($\partial/\partial x \equiv 0$, $u \equiv 0$) уравнение (5) значительно упрощается:

$$(1 + \zeta V^2 - \frac{\mu}{Y} V) Y_V = (1 - V^2) \quad (9)$$

и описывает хорошо известное течение [7], которое в случае $\mu = 0$ интегрируется в элементарных функциях (рис. 1, а):

$$Y(V, \zeta) = Y_P(V, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left\{ 1 + \frac{1}{\zeta} \right\} \operatorname{arctg}(\sqrt{\zeta} V) - \frac{V}{\zeta}, \quad (10)$$

$$\Phi_P(V, \zeta) = \left\{ 1 + \frac{1}{\zeta} \right\} \times \left\{ \frac{V}{\sqrt{\zeta}} \operatorname{arctg}(\sqrt{\zeta} V) - \frac{1}{2\zeta} \ln(1 + \zeta V^2) \right\} - \frac{V^2}{2\zeta}.$$

Топологически в любой геометрии (плоской $\mu = 0$, цилиндрической $\mu = 1$, сферической $\mu = 2$) в одномерной задаче зависимость $Y(V)$ эквивалентна кубической параболе. Таким образом, при построении нелинейных решений (в том числе для многомерных распределений), может оказаться вполне достаточно использования полинома третьей степени. Физический смысл имеет центральная часть (вблизи точки $Y = 0$) распределения между двумя экстре-

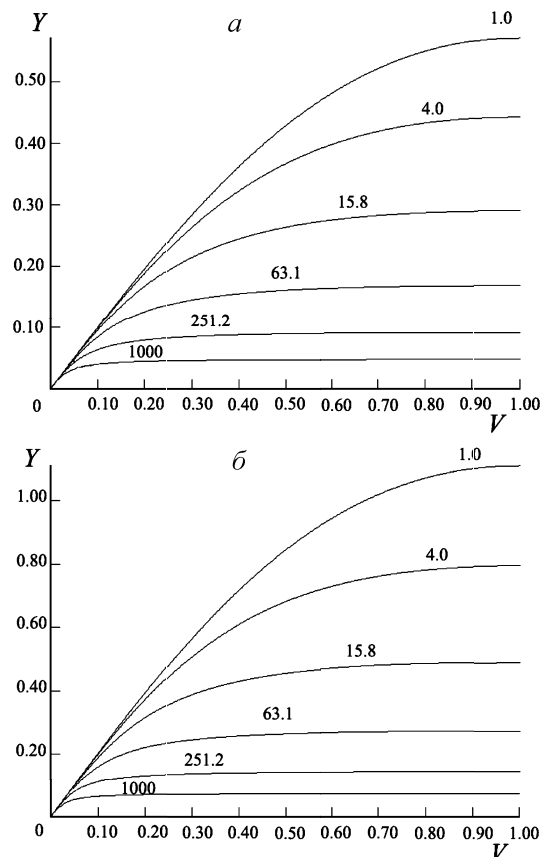


Рис. 1. Зависимость координаты в разряде от скорости ионов для плоского (а) и цилиндрического (б) положительного столба, цифра у кривой — параметр ζ

мумами, где $Y_V \geq 0$, т. е. положение границы (L_y), на которой происходит рекомбинация, определяется условием $Y_V = 0$ (или $V_Y = \infty$). Из решения (10) следует $v(L_y) = V_S$, $L_y = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left\{ 1 + \frac{1}{\zeta} \right\} \text{arctg}(\sqrt{\zeta}) - \frac{1}{\zeta}$. Первое выражение представляет собой критерий Бома, а второе определяет значение частоты ионизации в разряде при заданном положении границы. Решение уравнения (9) для цилиндрической геометрии может быть получено численным интегрированием и приведено на рис. 1, б.

Решения для плоской и цилиндрической разрядных камер

Ниже будет показано, что распределение плотности заряженных частиц в положительном столбе разряда выражается через одномерные решения. Будем искать решение (8) в виде

$$\Phi = F(U) + G(V). \tag{11}$$

Подстановка в уравнение приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} & \frac{G_{VV}}{(1-V^2)} + \frac{F_{UU}}{(1-U^2)} = \\ & = \left\{ 1 + \zeta(U^2 + V^2) - \frac{\mu}{G_V} V \right\} \frac{F_{UU}}{(1-U^2)} \frac{G_{VV}}{(1-V^2)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$F_{UU} = \alpha^2 \frac{(1-U^2)}{(1+\alpha^2\zeta U^2)},$$

откуда следует (константу интегрирования, так как она ответственна только за сдвиг по координате, положим равной нулю)

$$\begin{aligned} F &= \Phi_{PU}(U, \alpha^2\zeta) = \left\{ 1 + \frac{1}{\alpha^2\zeta} \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{\alpha V}{\sqrt{\zeta}} \text{arctg}(\alpha\sqrt{\zeta}V) - \frac{1}{2\zeta} \ln(1 + \alpha^2\zeta V^2) \right\} - \frac{V^2}{2\zeta}. \end{aligned}$$

Уравнение (12) при этом приводится к виду

$$\left\{ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} + \zeta V^2 - \frac{\mu}{G_V} V \right\} G_{VV} = (1 - V^2).$$

Замена переменной $Y = G_V$ приводит к уравнению (9), рассмотренному ранее с точностью до обозначения коэффициентов

$$Y_V \left\{ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} + \zeta V^2 - \frac{\mu}{Y} V \right\} = (1 - V^2).$$

Решение этого уравнения очень просто выражается через известное решение уравнения (9) для $\mu = 1$, которое мы обозначим $\Phi_\mu(V, \zeta)$:

$$G(V) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \Phi_\mu \left(V, \frac{\alpha^2\zeta}{\alpha^2 - 1} \right).$$

Таким образом, мы построили распределение плотности плазмы в двумерной геометрии для прямо-

угольной и цилиндрической разрядных камер, что важно для современных технологических установок. Кроме того, из решения следует, что на плоской критической поверхности критерий Бома выполняется для компоненты скорости, нормальной к границе.

Рассмотрим теперь разряд в цилиндрической камере диаметром $2R_0$, и высотой $2L_0$ см. Для того чтобы найти распределение плотности заряженных частиц в этой камере рассчитаем положение границы с помощью полученных выше соотношений

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{V_S}{\nu_i} \alpha^2 \Phi_{PU} \left(1, \frac{\alpha^2 \nu_{in}}{\nu_i} \right), \\ R_0 &= \frac{V_S}{\nu_i} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \Phi_{\mu V} \left(1, \frac{\alpha^2 \nu_{in}}{(\alpha^2 - 1) \nu_i} \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Система (13) позволяет определить значения коэффициента α и частоты ионизации ν_i в разряде, так же как и в стандартной теории Шоттки. Можно показать также, что решение трехмерного аналога уравнения (8) при $\mu = 0$ и $\Phi = F(U) + G(V) + H(W)$

$$\begin{aligned} & \frac{F_{UU}}{1-U^2} \frac{G_{VV}}{1-V^2} + \frac{G_{VV}}{1-V^2} \frac{H_{WW}}{1-W^2} + \frac{H_{WW}}{1-W^2} \frac{F_{UU}}{1-U^2} = \\ & = \{ 1 + \zeta(U^2 + V^2 + W^2) \} \frac{F_{UU}}{1-U^2} \frac{G_{VV}}{1-V^2} \frac{H_{WW}}{1-W^2} \end{aligned}$$

позволяет рассчитать распределение ионного тока в прямоугольной разрядной камере с размерами L_X, L_Y, L_Z по формулам

$$x = \frac{\partial \Phi(u, v, w)}{\partial u}, \quad y = \frac{\partial \Phi(u, v, w)}{\partial v}, \quad z = \frac{\partial \Phi(u, v, w)}{\partial w},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(u, v, w) &= \frac{V_S}{\nu_i} \left\{ \alpha^2 \Phi_P \left(\frac{u}{V_S}, \alpha^2 \frac{\nu_{in}}{\nu_i} \right) + \right. \\ & \left. + \beta^2 \Phi_P \left(\frac{v}{V_S}, \beta^2 \frac{\nu_{in}}{\nu_i} \right) + \gamma^2 \Phi_P \left(\frac{w}{V_S}, \gamma^2 \frac{\nu_{in}}{\nu_i} \right) \right\}, \end{aligned}$$

а значения неизвестных коэффициентов $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$, и частота ионизации ν_i рассчитываются из уравнений

$$\begin{aligned} L_X &= \frac{V_S}{\nu_i} \alpha^2 \Phi_{PU} \left(1, \frac{\alpha^2 \nu_{in}}{\nu_i} \right), \\ L_Y &= \frac{V_S}{\nu_i} \beta^2 \Phi_{PU} \left(1, \frac{\beta^2 \nu_{in}}{\nu_i} \right), \\ L_Z &= \frac{V_S}{\nu_i} \gamma^2 \Phi_{PU} \left(1, \frac{\gamma^2 \nu_{in}}{\nu_i} \right), \quad \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = 1. \end{aligned}$$

Знание частоты ионизации дает возможность рассчитать температуру электронов, напряженность электрического поля и другие параметры разряда по известным зависимостям [2]. Рассчитанные распределения плотности электронов в цилиндрической разрядной камере для некоторых значений ζ приведены на рис. 2.

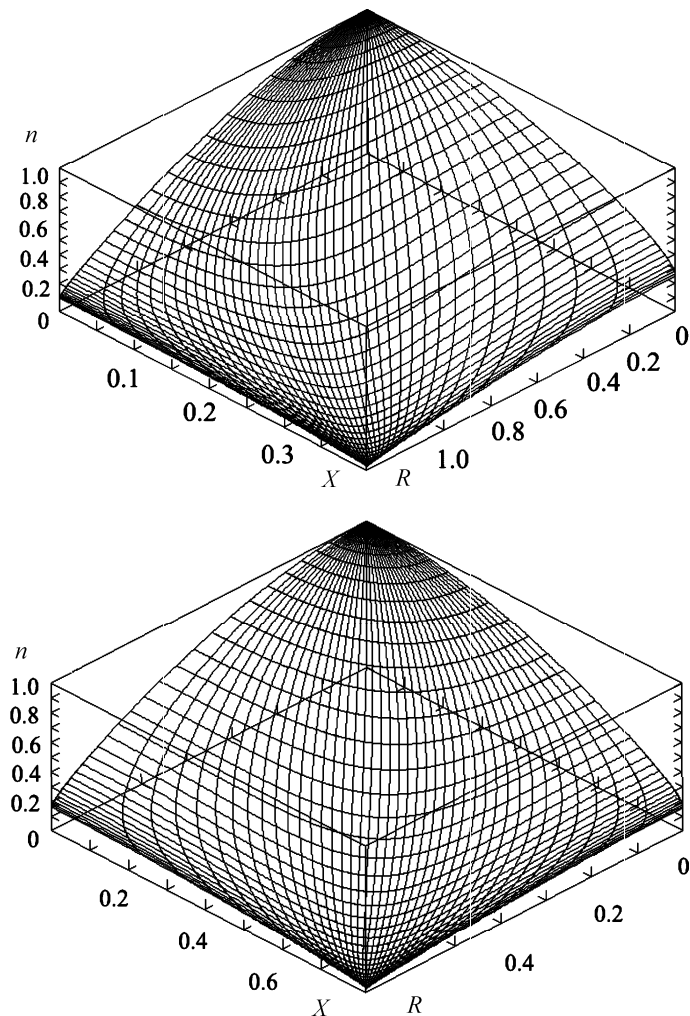


Рис. 2. Распределение плотности электронов в разряде в цилиндрической (а) и плоской (б) камере. Кривые, изображающие поверхность, представляют собой линии постоянной скорости и постоянного направления скорости. (а) $\zeta = 0.3$, (б) $\zeta = 1.0$

Заключение

В гидродинамическом приближении с учетом ионизации получены пространственные распределения плотности заряженных частиц и скорости течения плазмы на стенку для положительного столба газового разряда в цилиндрической и прямоугольной разрядных камерах. Получены алгебраические уравнения, определяющие частоту ионизации в разряде как функцию размеров разрядной камеры. Показано, что для потенциальных течений в несимметричных точках скорость течения плазмы превышает ионно-звуковую, а условие Бома выполняется для компоненты скорости, перпендикулярной к границе.

Литература

1. Langmuir I., Tonks L. // Phys. Rev. 1929. **34**. P. 876.
2. Грановский В.Л. Электрический ток в газе. Установившийся ток. М., 1971.
3. Смирнов Б.М. Физика слабоионизованного газа. М., 1978.
4. Двинин С.А., Довженко В.А., Кузовников А.А. // Физика плазмы. 1999. **25**, № 11. С. 882.
5. Двинин С.А., Довженко В.А., Кузовников А.А. // Физика плазмы. 2000. **26**, № 2. С. 179.
6. Schottky W. // Physikalische Zeitschrift. 1924. **25**. P. 342, 635.
7. Persson K.B. // Phys. Fluids. 1962. **5**. P. 1625.
8. Bohm D. The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields. / Ed. A. Guthry, R.K. Wakerling. N.Y., 1949. Ch. 3. P. 77.
9. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М., 1981. Гл. IV.
10. Черный Г.Г. Газовая динамика. М., 1988.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 10. Гидродинамика. М., 1986.

Поступила в редакцию
03.11.03