УДК 517.958: 621.372.8

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВОЛНОВОДА С НЕОДНОРОДНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых, В. Л. Пономарева

(*кафедра математики*)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Доказана неустойчивость собственных значений электромагнитного волновода с вещественным заполнением по отношению к малым возмущениям его параметров.

1. Явление резонанса в задачах о возбуждении колебаний в сложных волноведущих системах током вида $\mathbf{j}\,e^{-i\omega t}$ состоит в следующем: решение, гармонически зависящее от времени, существует лишь при частотах ω, не принадлежащих так называемому резонансному множеству.

В случае регулярного полого волновода это множество состоит только из частот отсечки и представляет собой совокупность корней из собственных значений задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа на сечении волновода [1]. Причем при резонансных частотах существует лишь нестационарное поле, амплитуда которого растет со временем как $\sqrt{t}$ [2].

В более сложных системах (и в первую очередь в локально нерегулярных волноводах) среди резонансных частот есть и другие, не связанные с переходом к режиму излучения. При этих частотах возникает поле, амплитуда которого растет как t.

Рассмотрим цилиндрический волновод Ω с осью, параллельной оси Oz, и сечением S. Пусть волновод заполнен неоднородным веществом, характеризуемым $\varepsilon = \varepsilon(\mathrm{x,y,z})$ и $\mu \equiv 1$, и ограничен идеально проводящими стенками. Установившиеся колебания в таком волноводе будут описываться системой уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\varepsilon\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, & \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mathbf{B}, & \operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = 4\pi\rho, \end{cases}$$

с условием $[\mathbf{E}, n] = 0$ на границе $\partial\Omega$ и парциальными условиями излучения на бесконечности [1]. Будем далее всюду предполагать, что $\varepsilon(x,y,z)$ — вещественнозначная кусочно-непрерывная функция, носители функций $\varepsilon(x,y,z) - 1$ и j ограничены, а $\rho \equiv 0$.

Задача о возбуждении колебаний током в локально нерегулярном волноводе при частотах, отличных от частот отсечки, является фредгольмовой, т. е. из единственности ее решения следует существование решения. Для решения $\mathbf{E}(x,y,z)$ и $\mathbf{B}(x,y,z)$ однородной (спектральной) задачи

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{B} = -ik\varepsilon\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mathbf{B}, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

с граничными и парциальными условиями излучения ограничены интегралы

$$\int\limits_{\Omega} |\mathbf{E}|^2 d\tau < \infty \quad \text{и} \quad \int\limits_{\Omega} |\mathbf{H}|^2 d\tau < \infty.$$

Поэтому появление резонансных частот, отличных от частот отсечки, связано с существованием у спектральной задачи (1) собственных функций из гильбертова пространства $L^2(\Omega)$.

2. На возможность существования собственных значений у спектральных задач в неограниченных областях впервые указал Ф. Реллих в 1948 г. [3]. Для волновода в скалярном приближении был построен ряд примеров таких волноведущих систем, а именно ряд локально нерегулярных, или изогнутых, волноводов [4–8].

В частности, в [9] было показано, что в скалярном случае волновод с заполнением типа вставки, когда ε зависит только от z, существует бесконечно много собственных значений задачи (1), если $\varepsilon - 1 \geqslant 0$. Этот результат может быть перенесен на электромагнитный случай следующим образом [9]:

Теорема 1. *Если заполнение волновода $\varepsilon = \varepsilon_0(z)$ и $\varepsilon - 1 \geqslant 0$, то у спектральной задачи существует набор собственных функций вида $\mathbf{E}^{(n)} = \operatorname{rot}\psi^{(n)}e_z$, где $\psi^{(n)} = Z^{(n)}(z)\phi^{(n)}(x,y)$ и $\phi^{(n)}(x,y)$ — собственные функции задачи*

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \gamma\phi, \\ \left.\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

где ν — внешняя нормаль к боковой поверхности волновода, а $Z^{(n)}(z)$ — собственные функции задачи

$$\begin{cases} -Z'' - k^2\varepsilon(z)Z + \sigma Z = 0, \\ Z \in L_2(R^1). \end{cases}$$

3. Поскольку (в скалярном приближении) непрерывный спектр начинается с первой частоты отсечки [5], к вложенным в него собственным значениям не применима регулярная теория возмущения. Более того, вещественное возмущение заполнения вида

$$\varepsilon(x,y,z)=\varepsilon_0(z)+\delta\varepsilon_1(x,y,z),$$

где параметр δ характеризует малость возмущения, может привести к интересному явлению — исчезновению собственного значения. Для скалярного случая пример такого возмущения был построен явно в работах [9–11]. Перенесем этот результат на электромагнитный случай:

Теорема 2. *Пусть k_0 — собственное значение задачи* (1) *с заполнением типа вставки*

$$\varepsilon_0(z)=\begin{cases}\varepsilon_0, & -1\leqslant z\leqslant 1,\\ 1, & z\notin[-1,1],\end{cases}$$

о котором шла речь в теореме 1, и пусть k_0^2 больше первого собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа на сечении:

$$\begin{cases}-\Delta\zeta=\gamma\zeta,\\ \zeta|_{d\Omega}=0.\end{cases}\qquad(2)$$

Тогда существует такое финитное вещественное возмущение ε_1, что в окрестности k_0 не имеется собственного значения задачи (1) *с заполнением $\varepsilon(x,y,z)=\varepsilon_0(z)+\delta\varepsilon_1(x,y,z)$.*

Доказательство. Допустим противное, что именно в окрестности некоторого собственного значения k_0 невозмущенной задачи (1) имеется собственное значение $k(\delta)$ возмущенной задачи. Тогда в рамках формальной теории возмущений собственные функции $\mathbf{E}(x,y,z)$, $\mathbf{B}(x,y,z)$ возмущенной задачи (1) и собственное значение k могут быть разложены в ряды вида

$$\mathbf{E}(x,y,z)=\mathbf{E}_0(z)+\delta\mathbf{E}_1(x,y,z)+\ldots,$$
$$\mathbf{B}(x,y,z)=\mathbf{B}_0(z)+\delta\mathbf{B}_1(x,y,z)+\ldots,$$
$$k(x,y,z)=k_0(z)+\delta k_1(x,y,z)+\ldots.$$

Заметим сначала, что первая поправка к E_z (обозначим ее как E) удовлетворяет задаче

$$\begin{cases}\Delta\mathbf{E}+\beta\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial z}+\left\{\beta'+k_0^2\varepsilon_0\right\}\mathbf{E}=-\left(\nabla\left(\frac{\nabla\varepsilon_1}{\varepsilon_0},\mathbf{E}_0\right),e_z\right),\\ \mathbf{E}|_{\partial}\,\Omega=0,\\ \mathbf{E}\in L^2(\Omega),\end{cases}\qquad(3)$$

где $\beta(z)=\frac{1}{\varepsilon_0(z)}\frac{d\varepsilon_0(z)}{dz}$. В самом деле, запишем уравнение для первого порядка теории возмущений:

$$\begin{cases}\operatorname{rot}\mathbf{B}_1=-i(k_0\varepsilon_0\mathbf{E}_1+k_0\varepsilon_1\mathbf{E}_0+k_1\varepsilon_0\mathbf{E}_0),\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}_1=i(k_1\mathbf{B}_0+k_0\mathbf{B}_1),\\ \operatorname{div}\mathbf{B}_1=0,\\ \operatorname{div}(\varepsilon_0\mathbf{E}_1+\varepsilon_1\mathbf{E}_0=0.\end{cases}\qquad(4)$$

Из систем (1) при $\varepsilon=\varepsilon_0$ и (4) получим уравнение для $\mathbf{E}_1$:

$$\frac{1}{k_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}_1-k_0\varepsilon_0\mathbf{E}_1=\frac{k_1}{k_0^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}_0+k_0\varepsilon_1\mathbf{E}_0+k_1\varepsilon_0\mathbf{E}_0,$$

которое с учетом того, что $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}_0=k_0^2\varepsilon_0\mathbf{E}_0$, можно переписать в виде:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}_1-\Delta\mathbf{E}_1-k_0^2\varepsilon_0\mathbf{E}_1=(2k_1k_0\varepsilon_0+k_0^2\varepsilon_1)\mathbf{E}_0.\quad(5)$$

Выразим $\operatorname{div}\mathbf{E}_1$ из последнего уравнения системы (4), и найдем z-компоненту $\nabla(\operatorname{div}E_1)$:

$$(\nabla(\operatorname{div}\mathbf{E}_1),e_z)=-\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z}E\right\}-(\nabla(\frac{\nabla\varepsilon_1}{\varepsilon_0},\mathbf{E}_0),e_z).$$

Из (5) получим уравнение для $\mathbf{E}$. Поскольку касательная компонента $\mathbf{E}_1$ на поверхности волновода непрерывна, то граничное условие для $\mathbf{E}$ запишется следующим образом: $\mathbf{E}|_{\partial\Omega}=0$. В итоге получим систему уравнений (3). Поскольку непрерывный спектр задачи (3) начинается с λ_1, у этой задачи существует решение, принадлежащее L^2, лишь при исключительных правых частях. Поскольку в правую часть входит ε_1, ее всегда можно подобрать так, чтобы решения из L^2 не существовало.

В самом деле, разложив теперь решение E задачи (3) в ряд по собственным функциям задачи (2)

$$E=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(z)\zeta_k(x,y)$$

и подставив его в (4), получим задачу для определения коэффициентов разложения

$$\begin{cases}\xi_k''+\beta\xi_k'+(\beta'+k_0^2\varepsilon_0-\lambda_k)\xi_k=-f_k,\\ \xi_k\in L^2(R^1),\end{cases}$$

где

$$f_k=\int\limits_S\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nabla\varepsilon_1}{\varepsilon_0},\mathbf{E}_0\right)\zeta_k(x,y)ds.$$

Рассмотрим задачу для ξ_1. Подобно тому, как это было сделано в [9], получим, что:

$$\xi_1|_{z=\pm1}=\left.\frac{\partial\xi_1}{\partial z}\right|_{z=\pm1}=0.\qquad(6)$$

Учитывая эти условия, получим переопределенную задачу:

$$\begin{cases}\xi_1''+(\varepsilon_0k_0^2-\lambda_1)\xi_1=-f_1,\\ \xi_1|_{z=1}=0,\\ \xi_1|_{z=-1}=0.\end{cases}$$

Решение этой задачи можно найти с помощью функции Грина:

$$\xi_1(z)=-\int\limits_{-1}^{1}G(z,\eta)f_1(\eta)\,d\eta,$$

$$G(z,\eta)=\frac{1}{W}\begin{cases}v_2^1(\eta)v_1^1(z), z\leqslant\eta,\\ v_1^1(\eta)v_2^1(z), z\geqslant\eta,\end{cases}$$

где W — определитель Вронского и

$$v_1^1(z)=\sin\left[\chi(z+1)\right],\quad v_2^1(z)=\sin\left[\chi(z-1)\right],$$

$$\chi=\chi_1=\sqrt{k_0^2\varepsilon_0-\lambda_1}.$$

При этом для ξ_1 должны выполняться условия (6). Так как $(v_2^1(1))'$ и $(v_1^1(-1))'$ не равны нулю, то получим:

$$\int\limits_{-1}^{1}\sin\left[\chi(\eta\pm 1)\right]f_1(\eta)\,d\eta=0.\tag{7}$$

Для обнаружения противоречия найдем кусочно-непрерывную функцию $\varepsilon_1(x,y,z)$ такую, что

$$Q(z)=\int\limits_S\left(\frac{\nabla\varepsilon_1}{\varepsilon_0},\mathbf{E}_0\right)\zeta_1(x,y)\,ds\tag{8}$$

не удовлетворяет одному из равенств (8) или равенств

$$\sin[\chi(\eta\pm1)]Q(\eta)|_{-1}^{1}-\chi\int\limits_{-1}^{1}\cos[\chi(\eta\pm1)]Q(\eta)\,d\eta=0,\tag{9}$$

которые получаются при интегрировании (7) по частям. Из выражения, полученного в теореме 1,

$$\mathbf{E}_0=\operatorname{rot}\psi e_z=Z_n\left[\frac{\partial\phi_n}{\partial y}e_x-\frac{\partial\phi_n}{\partial x}e_y\right],$$

видно, что правая часть (9) может обращаться в нуль при $z\in[-1,1]$ в нулях функции $Z_n(z)$. Обозначим их для краткости как z_p $(p=1,\ldots,N)$. Выберем функцию $Q(z)$ так, чтобы в точках z_p она была равна нулю, а в остальных точках — так, чтобы нарушалось условие (9), например $Q(z)=\cos[\chi(z+1)]$.

Исследуем поведение (9) при таком выборе $Q(z)$. Проинтегрируем (9) по отрезку $[-1,1]$. Учтем то, что $Q(z)$ в точках z_p имеет разрывы. Для этого выделим малые окрестности каждой точки z_p с произвольными радиусами r_p. Можно показать, что при достаточно малых радиусах

$$\sin[\chi(\eta\pm1)]Q(\eta)|_{-1}^{1}-\chi\int\limits_{-1}^{1}\cos[\chi(\eta\pm1)]Q(\eta)d\eta<0.$$

Подходящее значение $\varepsilon_1(x,y,z)$ определим из (8). Пусть $w(x,y)$ — произвольная функция, для которой число

$$\alpha=\int\limits_S\left[\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\,\frac{\partial\phi_n}{\partial y}-\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\,\frac{\partial\phi_n}{\partial x}\right]\zeta_1(x,y)\,ds$$

не равно нулю. Рассмотрим $z\in R^1\setminus z_p$. Полагая $\varepsilon_1(x,y,z)=\varsigma(z)w(x,y)$, получим

$$\varsigma(z)=\frac{\varepsilon_0Q(z)}{\alpha Z_n(z)}.$$

В точках z_p функция $\varsigma(z)$ имеет произвольное значение, поэтому можем доопределить ее нулем. Тогда искомая функция $\varepsilon_1(x,y,z)$ будет иметь вид:

$$\varepsilon_1(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_0Q(z)}{Z_n(z)}\,\dfrac{w(x,y)}{\alpha}, & z\in R^1\setminus z_p,\\ 0, & z=z_p.\end{cases}$$

Такая функция уже будет ограниченной кусочно-непрерывной, и при достаточно малых радиусах соотношение (9) все еще не будет выполняться. Теорема доказана.

Основной смысл доказанной теоремы заключается в том, что вложенные в непрерывный спектр собственные значения неустойчивы к малым возмущениям заполнения волновода. Это свойство является довольно неожиданным, поскольку обычно собственное значение исчезает лишь при возмущении заполнения комплексной добавкой, т. е. при введении затухания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 02-01-00271, 03-01-00166) и программы «Университеты России» (грант УР.03.03.039).

Литература

1. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М., 1993.
2. *Werner P.* // Z. Angew. Math. Mech. 1987. **67**, N 4. P. 43.
3. *Rellich F.* // Studies and essays presented to R. Courant. N.-Y., 1948. P. 329.
4. *Jones D.S.* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1954. **49**. P. 668.
5. *Evans D. V., Levitin M., Vassiliev D.* // J. Fluid Mech. 1994. **261**. P. 21.
6. *Evans D.V., Porter R.* // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1998. **51**. P. 263.
7. *Davies E.B., Parnovski L.* // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1998. **51**. P. 477.
8. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. №5. С. 23 (Moscow University Phys. Bull. 2001. N 5. P. 29).
9. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г.* // Докл. РАН. 2002. **385**, №6. С. 744.
10. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г.* // ЖВМ и МФ. 2002. **42**, №12. С. 1833.
11. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д.* // ЖВМ и МФ. 2003. **43**, №7. С. 1049.

Поступила в редакцию
30.09.03