УДК 530.145

КВАНТОВЫЕ ПОПРАВКИ В $N=1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ, РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А.А.Солошенко, К.В.Степаньянц

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: stepan@phys.msu.su

Исследуется структура эффективного действия и ренормгрупповых функций в $N=1$ суперсимметричной электродинамике, регуляризованной высшими производными. На основе полученных результатов дается решение проблемы аномалий в рассматриваемой модели.

Введение

Хорошо известно, что в суперсимметричных теориях аномалия следа и аксиальная аномалия являются компонентами одного супермультиплета. В соответствии с теоремой Адлера–Бардина аксиальная аномалия является чисто однопетлевой, тогда как аномалия следа пропорциональна β-функции. Поэтому суперсимметрия, по-видимому, должна приводить к тому, что β-функция в суперсимметричных теориях является чисто однопетлевой. Однако явные вычисления показали существование высших поправок к β-функциям $N=1$ суперсимметричных теорий в случае использования регуляризации с помощью размерной редукции. Это противоречие получило в литературе название «проблема аномалий».

Исследованию проблемы аномалий в суперсимметричных теориях было посвящено очень большое число работ. Например, в работе [1] авторы утверждали, что проблема аномалий возникает из-за различия между обычным и вильсоновским эффективными действиями. В частности, было замечено существование нетривиального вклада в β-функцию, связанного с существованием аномалии Кониши [2, 3]. Исследование этого вклада в работе [1], а также исследование инстантонных вкладов в работе [4] привело к построению так называемой точной β-функции Новикова, Шифмана, Вайнштейна и Захарова. Для $N=1$ суперсимметричной электродинамики такая β-функция имеет следующий вид:

$$\beta(\alpha)=\frac{\alpha^2}{\pi}\Big(1-\gamma(\alpha)\Big), \qquad (1)$$

где $\gamma(\alpha)$ — аномальная размерность суперполя материи.

Еще одно решение проблемы аномалий было предложено в работе [5]. Основная идея работы [5] заключается в том, что вклады высших порядков в точную β-функцию Новикова, Шифмана, Вайнштейна и Захарова происходят из аномального якобиана, который возникает при переходе от голоморфной нормировки суперполей материи к канонической*). В первом случае было сделано предположение, что β-функция является чисто однопетлевой, тогда как во втором случае она совпадает с результатом Новикова, Шифмана, Вайнштейна и Захарова. Однако такое решение противоречит явным вычислениям, выполненным при использовании регуляризации размерной редукцией.

Естественно предположить, что однопетлевая β-функция в голоморфной нормировке получится, если использовать регуляризацию высшими ковариантными производными [6], дополненную регуляризацией Паули–Вилларса. Соответствующие явные двух- и трехпетлевые вычисления для $N=1$ суперсимметричной электродинамики, регуляризованной высшими производными, были выполнены в работах [7–9]. Опишем эти вычисления более подробно.

1. $N=1$ суперсимметричная электродинамика и регуляризация с помощью высших производных

$N=1$ суперсимметричная электродинамика, регуляризованная высшими производными, описывается следующим действием:

$$S=\frac{1}{4e^2}\,\mathrm{Re}\int d^4x\,d^2\theta\,W_aC^{ab}\Big(1+\frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}}\Big)W_b+ \\ +\frac{1}{4}\int d^4x\,d^4\theta\,\Big(\phi^*e^{2V}\phi+\tilde\phi^*e^{-2V}\tilde\phi\Big), \qquad (2)$$

где ϕ и $\tilde\phi$ — киральные суперполя, V — вещественное суперполе, C^{ab} — матрица зарядового сопряжения, а Λ — параметр регуляризации, который имеет размерность массы. Заметим, что суперсимметричный аналог тензора напряженности калибровочного поля W_a в абелевом случае является калибровочно инвариантной величиной, благодаря чему в слагаемом с высшими производными стоят обычные (а не ковариантные) производные. Калибровочная инвариантность фиксируется добавлением слагаемого

$$S_{\text{gf}}=-\frac{1}{64e^2}\int d^4x\,d^4\theta\times \\ \times\left(VD^2\bar D^2\Big(1+\frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}}\Big)V+V\bar D^2D^2\Big(1+\frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}}\Big)V\right).$$

*) Далее мы объясним это более подробно, см. формулы (4) и (14).

В абелевом случае диаграммы, содержащие духовые петли, отсутствуют.

Однако добавление слагаемого с высшими производными не регуляризует однопетлевые расходимости. Для того чтобы регуляризовать их, необходимо вставить в производящий функционал детерминанты Паули–Вилларса [10]:

$$Z=\int DV\,D\phi\,D\tilde\phi\prod_i\Big(\det{}_{\rm hol}PV(V,M_i)\Big)^{c_i}\times \\ \times\exp\Big(i(S_{\rm hol}+S_{\rm gf}+{\rm Sources})\Big), \tag{3}$$

где

$$S_{\rm hol}=\frac{1}{4e^2}Z_3(e,\Lambda/\mu)\times \\ \times{\rm Re}\int d^4x\,d^2\theta\,W_aC^{ab}\Big(1+\frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}}\Big)W_b+ \\ +Z(e,\Lambda/\mu)\frac{1}{4}\int d^4x\,d^4\theta\,\Big(\phi^*e^{2V}\phi+\tilde\phi^*e^{-2V}\tilde\phi\Big) \tag{4}$$

— перенормированное действие в голоморфной нормировке, Sources — члены с источниками, детерминанты Паули–Вилларса определяются как

$$\Big(\det{}_{\rm hol}PV(V,M)\Big)^{-1}=\int D\Phi\,D\tilde\Phi\times \\ \times\exp\Big\{i\Big[Z(e,\Lambda/\mu)\frac{1}{4}\int d^4x\,d^4\theta\Big(\Phi^*e^{2V}\Phi+\tilde\Phi^*e^{-2V}\tilde\Phi\Big)+ \\ +\frac{1}{2}\int d^4x\,d^2\theta\,M\tilde\Phi\Phi+\frac{1}{2}\int d^4x\,d^2\bar\theta\,M\tilde\Phi^*\Phi^*\Big]\Big\}, \tag{5}$$

а коэффициенты c_i удовлетворяют уравнениям

$$\sum_i c_i=1;\qquad \sum_i c_iM_i^2=0.$$

Далее мы будем полагать, что $M_i=a_i\Lambda$, где a_i — некоторые постоянные. Такие детерминанты Паули–Вилларса позволяют сократить остаточные однопетлевые расходимости, в том числе и в диаграммах, которые содержат контрчленные вставки.

Производящий функционал для связных функций Грина и эффективное действие Γ могут быть построены стандартным образом.

β-функция обычно определяется как

$$\beta(\alpha)=\frac{d}{d\ln\mu}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right), \tag{6}$$

где μ — точка нормировки, а

$$\alpha\equiv\frac{e^2}{4\pi}.$$

Нетрудно видеть, что именно такая β-функция будет пропорциональна аномалии следа. Однако можно использовать и другое определение β-функции. Рассмотрим поперечную часть двухточечной функции Грина калибровочного поля:

$$\Pi_{1/2}\int d^4x\,d^4y\,\frac{\delta^2\Gamma}{\delta V_x\,\delta V_y}\bigg|_{V=0}\exp\Big(ip_\mu x^\mu+iq_\mu y^\mu\Big)= \\ =\frac{1}{8\pi}(2\pi)^4\delta^4\Big(p+q\Big)\,p^2\Pi_{1/2}\delta^4(\theta_x-\theta_y)\,d^{-1}(\alpha,\mu/p), \tag{7}$$

где $\Pi_{1/2}$ — суперсимметричный поперечный проектор, а $d(\alpha,\mu/p)$ — некоторая скалярная функция. Тогда можно определить функцию Гелл-Манна–Лоу

$$\tilde\beta\Big(d(\alpha,x)\Big)\equiv -x\frac{\partial}{\partial x}d(\alpha,x). \tag{8}$$

Принимая во внимание, что эффективное действие не должно зависеть от точки нормировки μ, и дифференцируя уравнение (7) по $\ln\mu$ при $x=1$, мы получаем

$$\tilde\beta(\tilde\alpha)=\beta(\alpha)\frac{d\tilde\alpha}{d\alpha}, \tag{9}$$

где $\tilde\alpha\equiv d(\alpha,1)$. Следовательно, если производящий функционал не зависит от μ, то оба определения β-функции являются эквивалентными.

2. Бета-функции N=1 суперсимметричной электродинамики, регуляризованной высшими производными

Результаты работ [7–9] могут быть записаны следующим образом. Если вычисления проводятся с производящим функционалом (3), то

$$\Delta\Gamma_{2\text{-}point}=\frac{1}{4}\int d^4\theta\,\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\times \\ \times\Big(\phi^*(p,\theta)\,\phi(-p,\theta)+\tilde\phi^*(p,\theta)\,\tilde\phi(-p,\theta)\Big)(ZG-1)+ \\ +\frac{1}{16\pi^2}{\rm Re}\int d^2\theta\frac{d^4p}{(2\pi)^2}\,W_a(p,\theta)C^{ab}W_b(-p,\theta)\times \\ \times\left(\ln\frac{\mu}{p}-\ln(ZG)+{\rm const}\right), \tag{10}$$

где $G=G(\alpha_0,\Lambda/p)$ — некоторая функция и ZG конечно в пределе $\Lambda\to\infty$ в соответствии с определением константы перенормировки Z. Константа перенормировки Z_3 при этом определяется равенством

$$\frac{4\pi^2}{e_0^2}=\frac{4\pi^2}{e^2}Z_3=\frac{4\pi^2}{e^2}-\ln\frac{\Lambda}{\mu}+{\rm const},$$

которое является точным во всех порядках теории возмущений. Следовательно, β-функция (6) является чисто однопетлевой (в полном соответствии с аргументами, основанными на структуре супермультиплета аномалий) и записывается в виде

$$\beta(\alpha)=\frac{\alpha^2}{\pi}.$$

Фактически расходимости, идущие из диаграмм с контрчленными вставками на линиях суперполей материи, в точности компенсируют все остальные расходимости.

Расходящаяся часть диаграмм с контрчленными вставками вычислена в работе [11] точно во всех порядках теории возмущений и равна

$$\Delta\Gamma = -\ln Z\,\frac{1}{16\pi^2}\,\mathrm{Re}\int d^4x\,d^2\theta\,W_a C^{ab} W_b + \\ + \text{конечные члены}, \tag{11}$$

где Z — константа перенормировки в формуле (4).

Однако β-функция (8) имеет поправки во всех порядках теории возмущений, поскольку конечная часть эффективного действия зависит от μ/p. Из уравнения (10) легко видеть, что β-функция (8) совпадает с β-функцией Новикова, Шифмана, Вайнштейна и Захарова (1).

3. Сравнение регуляризации высшими производными и размерной редукцией

β-Функция (6), полученная при использовании регуляризации высшими производными, отличается от соответствующего результата в методе размерной редукции [12]. В двухпетлевом приближении сравнение вычислений эффективного действия при использовании регуляризаций высшими производными и размерной редукцией было выполнено в работе [11]. В соответствии с вычислениями, выполненными в работах [7–9], различие результатов для β-функции связано с различием в результатах для суммы диаграмм, содержащих контрчленные вставки. При использовании размерной редукции их вклад равен нулю, тогда как при использовании высших производных он дается выражением (11).

Различие результатов для суммы диаграмм с контрчленными вставками вызвано математической противоречивостью размерной редукции, замеченной в работе [13], поскольку эта противоречивость приводит к нулевым результатам для аномалий. Действительно, поскольку при использовании размерной редукции необходимо, чтобы размерность пространства-времени n была бы меньше четырех [12], можно выбрать матрицу γ_5, которая антикоммутирует со всеми γ-матрицами. Тогда в силу математической противоречивости размерной редукции в регуляризованной теории сохраняется киральная симметрия. Как следствие при вычислении аксиальной аномалии вместо правильного результата получается ноль, причем суперсимметрия при этом не нарушена. Тогда, как нетрудно видеть [9], вместо равенства

$$\left\langle \exp\left(i(Z-1)\,\frac{1}{4}\int d^4x\,d^4\theta\left(\phi^* e^{2V}\phi + \tilde\phi^* e^{-2V}\tilde\phi\right)\right)\right\rangle = \\ = \exp\left(-i\ln Z\frac{1}{16\pi^2}\,\mathrm{Re}\int d^4x\,d^2\theta\,W_a C^{ab} W_b + \\ + \text{конечные члены}\right), \tag{12}$$

левая часть которого представляет собой экспоненту от суммы диаграмм с контрчленными вставками и которое очень сходно по структуре с аномалией Кониши, мы получим

$$\left\langle \exp\left(i(Z-1)\,\frac{1}{4}\int d^4x\,d^4\theta\left(\phi^* e^{2V}\phi + \tilde\phi^* e^{-2V}\tilde\phi\right)\right)\right\rangle = 1. \tag{13}$$

Формулы (12) и (13) были проверены явными трехпетлевыми вычислениями, выполненными в работах [7–9].

Таким образом, математическая противоречивость метода размерной редукции дает выражение для β-функции (6), которое отличается от соответствующего результата, вычисленного с помощью метода высших производных, и приводит к проблеме аномалий.

Заметим, что в размерной регуляризации такой проблемы не существует, поскольку матрица γ_5 может быть выбрана так, чтобы

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \quad \mu = 0,\ldots,3; \quad [\gamma_5, \gamma_\mu] = 0, \quad \mu > 3.$$

В этом случае киральная симметрия в регуляризованной теории является нарушенной и аксиальная аномалия вычисляется правильно [14]. Тем не менее размерная регуляризация нарушает суперсимметрию и неудобна для использования в суперсимметричных теориях.

4. Решение проблемы аномалий

Регуляризация с помощью высших производных удобна при исследовании проблемы аномалий, поскольку она позволяет вычислять аномалии и при этом не нарушает суперсимметричной инвариантности.

В соответствии с вычислениями, выполненными в работах [7–9], β-функция (6) является чисто однопетлевой, тогда как β-функция (8) содержит вклады всех порядков теории возмущений. На первый взгляд это противоречит уравнению (9). Однако на самом деле противоречие отсутствует, поскольку производящий функционал (3) зависит от μ. Действительно, благодаря аномалии масштабирования (12) оказывается невозможным удалить зависимость от μ при помощи преобразования $\phi \to Z^{-1/2}\phi$, поскольку аномальный вклад содержит $\ln Z$, зависящий от μ. Поэтому β-функции (6) и (8) оказываются различными: первая из них пропорциональна аномалии следа и в силу структуры супермультиплета аномалий является чисто однопетлевой, а вторая имеет поправки во всех порядках теории возмущений.

Следовательно, если теория регуляризована высшими производными, то, в отличие от регуляризации размерной редукцией [15], теорема Адлера–Бардина не противоречит суперсимметрии.

Заметим, что изложенные выше результаты в значительной степени напоминают решение проблемы аномалий, предложенное Шифманом и Вайнштейном [1]. Единственным существенным отличием является использование перенормированного действия $S_{\rm ren}$ вместо вильсоновского действия S_W.

Тем не менее желательно иметь производящий функционал, который не зависит от μ. Он может быть построен двумя различными способами. Можно считать, что голая константа связи e_0 зависит от μ. В этом случае β-функция (6) будет иметь поправки во всех порядках теории возмущений, но уже не будет пропорциональна аномалии следа. Другая возможность заключается в использовании канонической нормировки суперполей материи. При этом производящий функционал определяется как

$$Z = \int DV\, D\phi\, D\tilde{\phi} \prod_i \Big(\det{}_{\rm can} PV(V, M_i)\Big)^{c_i} \times \\ \times \exp\Big\{ i(S_{\rm can} + S_{gf} + Sources)\Big\},$$

где

$$S_{\rm can} = \frac{1}{4e^2} Z_3(\Lambda/\mu)\,\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab}\Big(1+\frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}}\Big) W_b + \\ + \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\,\Big(\phi^* e^{2V}\phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V}\tilde{\phi}\Big) \qquad (14)$$

— перенормированное действие в канонической нормировке и

$$\Big(\det{}_{\rm can} PV(V,M)\Big)^{-1} \equiv \int D\Phi\, D\tilde{\Phi} \times \\ \times \exp\Big\{ i\Big[\frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\,\Big(\Phi^* e^{2V}\Phi + \tilde{\Phi}^* e^{-2V}\tilde{\Phi}\Big) + \\ + \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, M\tilde{\Phi}\Phi + \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\bar{\theta}\, M\tilde{\Phi}^*\Phi^*\Big]\Big\}. \qquad (15)$$

Тогда нетрудно видеть, что наши результаты согласуются с результатами работы [5], поскольку β-функция (6) в точности равна β-функции Новикова, Шифмана, Вайнштейна и Захарова (вклад (11) теперь отсутствует). β-функция (6) в этом случае пропорциональна аномалии следа, но теорема Адлера–Бардина уже не справедлива.

Литература

1. *Shifman M., Vainshtein A.* // Nucl. Phys. 1986. **B277**. P. 456.
2. *Konishi K.* // Phys. Lett. 1984. **135B**. P. 439.
3. *Clark T.E., Piguet O., Sibold K.* // Nucl. Phys. 1979. **B159**. P. 1.
4. *Novikov V., Shifman M., Vainshtein A., Zakharov V.* // Phys. Lett. 1986. **166B**. P. 329.
5. *Arkani-Hamed N., Mirayama H.* // JHEP. 2000. **0006**. P. 030.
6. *Славнов А.А.* // ТМФ. 1975. **23**. С. 3.
7. *Soloshenko A.A., Stepanyantz K.V.* // E-print hep-th/0203118.
8. *Солошенко А.А., Степаньянц К.В.* // ТМФ. 2003. **134**. С. 430.
9. *Soloshenko A.A., Stepanyantz K.V.* // E-print hep-th/0304083.
10. *Фаддеев Л.Д., Славнов А.А.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М., 1978.
11. *Stepanyantz K.V.* // E-print hep-th/0301167; ТМФ. 2004. **140**. С. 53.
12. *Siegel W.* // Phys. Lett. 1979. **84B**. P. 193.
13. *Siegel W.* // Phys. Lett. 1980. **94B**. P. 37.
14. *t'Hooft G., Veltman M.* // Nucl. Phys. 1972. **B44**. P. 189.
15. *Казаков Д.И.* // Письма в ЖЭТФ. 1985. **41**. С. 272.

Поступила в редакцию
08.12.03