

УДК 537.533.7

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ГЛУБИННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОЗЫ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО И ЕГО ОЦЕНКА

А. В. Белоусов, А. П. Черняев

(кафедра физики ускорителей высоких энергий)

Исследуется зависимость числа электронов от глубины проникновения при прохождении пучка электронов через вещество. Проводится теоретическое исследование зависимости числа электронов на основе рассмотрения теории ливней и решения ливневых уравнений. Получена аналитическая аппроксимация распределения дозы. Проведено сравнение с экспериментально полученными распределениями дозы. Исследована теоретическая зависимость параметров аппроксимации от энергии первичного пучка.

Введение

В настоящее время достижения ядерной и радиационной физики активно применяются в медицинских целях. Среди областей медицины, где широко используются экспериментальные и расчетные методы дозиметрии и переноса ионизирующих излучений, существенную роль играет лучевая терапия (ЛТ). Одним из важнейших этапов лечения онкологических заболеваний при использовании ЛТ является дозиметрическое планирование (ДП). ДП включает в себя определение оптимального режима облучения, при котором рассчитывается доза в каждой точке объема мишени.

При взаимодействии электронов больших энергий с веществом малая часть их энергии поглощается непосредственно при взаимодействии первичных электронов, а основная часть превращается в фотоны достаточно высоких энергий. Вторичные фотоны в свою очередь либо образуют пары, либо претерпевают комптоновское рассеяние. В результате обоих этих процессов возникают электроны с энергиями, сравнимыми с энергией фотона. Эти новые электроны опять испускают фотоны, которые вновь образуют пары или комптоновские электроны. На каждой следующей ступени число частиц возрастает, а их средняя энергия убывает. В ходе этого процесса все большее число электронов попадает в такую энергетическую область, где радиационные потери становятся малыми и не могут конкурировать с потерями энергии на столкновения, пока в конце концов вся энергия первичного электрона не будет полностью растратчена на ионизацию и возбуждение атомов. Описанное выше явление обычно называют размножающимся, или каскадным, ливнем. Ливень может быть создан не только электроном большой энергии, но и высокоэнергетичными фотонами.

Цель настоящей работы — на основании решения уравнений, описывающих ливень, получить распределение дозы в зависимости от глубины проникновения электронов или фотонов в вещество, а также аппроксимацию этого распределения в достаточно простом виде и оценку его точности.

Развитие электронно-фотонного ливня с глубиной

Предположим, что на слой вещества падает электрон или фотон с энергией E_0 и рассмотрим затем плоскость на глубине x от точки попадания ее в вещество, которая перпендикулярна к направлению движения первичной частицы. Требуется определить вероятность того, что через рассматриваемую плоскость пройдут N_π электронов и N_γ фотонов, энергия которых заключена в интервале $(E_l, E_l + dE_l)$. Решение этой проблемы встречает трудности математического характера. Для решения задачи вводятся предположения, позволяющие упростить решения математических уравнений.

При больших энергиях углы, под которыми испускаются вторичные электроны и фотоны, чрезвычайно малы. Рассеяние электронов также мало, по крайней мере в веществах с небольшим атомным номером. Поэтому можно считать, что ливень развивается преимущественно в направлении первичной частицы. Это обстоятельство позволяет рассматривать развитие ливней в направлении первоначального распространения как самостоятельную задачу, а их поперечное распространение — как поправку к задаче прямолинейного распространения ливня.

Пусть $\pi(E, x)dE$ — среднее число электронов на глубине x с энергией, заключенной в интервале $(E, E + dE)$. Соответственно обозначим через $\gamma(E, x)dE$ среднее число фотонов с энергией между E и $E + dE$ на глубине x . Величины $\pi(E, x)$ и $\gamma(E, x)$ представляют собой дифференциальные спектры электронов и фотонов соответственно. Интегральные спектры электронов и фотонов в этом случае принимают вид:

$$\begin{cases} \Pi(E, x) = \int_E^\infty \pi(E', x) dE', \\ \Gamma(E, x) = \int_E^\infty \gamma(E', x) dE'. \end{cases} \quad (1)$$

Они представляют соответственно среднее число электронов и фотонов на глубине x , имеющих энер-

гию большую, чем E . $\pi^{(\pi)}(E_0, E, x)$, $\pi^{(\gamma)}(E_0, E, x)$ обозначают ливень, образованный одним электроном с энергией E_0 или одним фотоном энергии E_0 .

Рассмотрим величины $\pi(E, x)dE$ и $\gamma(E, x)dE$, дающие соответственно число электронов и фотонов на глубине x с энергией, заключенной в интервале $(E, E + dE)$. После прохождения бесконечно малого слоя вещества толщиной dx число электронов, энергия которых находится в этом интервале, изменится в результате действия следующих механизмов:

а) Фотоны с энергией E' , большей, чем E , образуют некоторое число электронов и позитронов в энергетическом интервале $(E, E + dE)$, которое составляет

$$dE dx \int_E^\infty \gamma(E', x) \varphi_{\gamma\pi}(E', E) dE', \quad (2)$$

где $\varphi_{\gamma\pi}(E', E)dE$ — вероятность, с которой фотон, обладающий энергией E' , образует на радиационной единице длины электрон с энергией, заключенной в интервале $(E, E + dE)$. Это может произойти в результате рождения электрон-позитронной пары либо в результате Комpton-эффекта. Таким образом, $\varphi_{\gamma\pi}(E', E)dE = 2\varphi_{\text{pair}}(E', E)dE + \varphi_{\text{comp}}(E', E - E)dE$. (3)

В этом выражении $\varphi_{\text{pair}}(E', E)dE$ — вероятность рождения пары, $\varphi_{\text{comp}}(E', E - E)dE$ — вероятность, с которой фотон, обладающий энергией E , испытывает комптоновское рассеяние на радиационной единице длины.

б) Электроны с энергией E' , большей, чем E , образуют некоторое число электронов в интервале энергий $(E, E + dE)$:

$$dE dx \int_E^\infty \pi(E', x) \varphi_{\pi\pi}(E', E) dE', \quad (4)$$

где $\varphi_{\pi\pi}(E', E)dE$ — вероятность, с которой электрон, обладающий энергией E' , образует на радиационной единице длины электрон с энергией, находящейся в интервале $(E, E + dE)$. Это может произойти либо в результате процесса радиационного торможения, в котором электрон теряет энергию $E' - E$, либо вследствие процесса столкновения, когда один из двух сталкивающихся электронов выходит из столкновения с энергией E . Таким образом,

$$\varphi_{\pi\pi}(E', E)dE = \varphi_{\text{rad}}(E', E - E)dE + \varphi_{\text{col}}(E', E)dE. \quad (5)$$

В этом выражении $\varphi_{\text{rad}}(E', E - E)dE$ — вероятность радиационного торможения, а $\varphi_{\text{col}}(E', E)dE$ — вероятность столкновения с атомными электронами. В $\varphi_{\text{col}}(E', E)dE$ величина E изменяется от 0 до E' , поэтому каждый процесс столкновения учитывается дважды. Следовательно, автоматически учитывается тот факт, что из каждого столкновения выходят два электрона — падающий и электрон атома.

в) Поскольку часть электронов, находившихся в интервале $(E, E + dE)$, теряя энергию, покидают его, то их число равно уменьшается на $\pi(E, t)\mu_\pi(E)dE dx$, где

$$\mu_\pi(E) = \int_0^E \varphi_{\text{rad}}(E, E') dE' + \frac{1}{2} \int_0^E \varphi_{\text{col}}(E, E') dE' \quad (6)$$

— полная вероятность выхода электрона из энергетического интервала $(E, E + dE)$ в результате столкновений и испускания γ -квантов. Во втором слагаемом (6) коэффициент $\frac{1}{2}$ учитывает, что в столкновении участвуют два электрона.

Изменение числа фотонов в интервале энергий $(E, E + dE)$ после прохождения излучением слоя вещества dx происходит в результате действия следующих механизмов:

а) Электроны с энергией E' , большей, чем E , образуют некоторое число фотонов в энергетическом интервале $(E, E + dE)$, которое составляет

$$dE dx \int_E^\infty \pi(E', x) \varphi_{\pi\gamma}(E', E) dE', \quad (7)$$

где $\varphi_{\pi\gamma}(E', E)dE$ — вероятность, с которой электрон, обладающий энергией E' , образует на радиационной единице длины фотон с энергией в интервале $(E, E + dE)$. Это может произойти только в результате радиационного торможения:

$$\varphi_{\pi\gamma}(E', E) = \varphi_{\text{rad}}(E', E). \quad (8)$$

б) Фотоны с энергией E' , большей, чем E , образуют некоторое число фотонов в интервале энергий $(E, E + dE)$, которое составляет

$$dE dx \int_E^\infty \gamma(E', x) \varphi_{\gamma\gamma}(E', E) dE', \quad (9)$$

где $\varphi_{\gamma\gamma}(E', E)dE$ — вероятность, с которой фотон с энергией E' образует на радиационной единице длины фотон с энергией в интервале $(E, E + dE)$. Это происходит в результате комптоновского рассеяния:

$$\varphi_{\gamma\gamma}(E', E) = \varphi_{\text{comp}}(E', E). \quad (10)$$

в) Часть фотонов, первоначально находившихся в энергетическом интервале $(E, E + dE)$, исчезают, образуя пару, или испытывают комптоновское рассеяние. Их число равно $\gamma(E, x)\mu_\gamma(E)dE dx$, где

$$\mu_\gamma(E) = \mu_{\text{pair}}(E) + \mu_{\text{comp}}(E) \quad (11)$$

— полная вероятность выхода фотонов из энергетического интервала $(E, E + dE)$ в результате рождения пар или комптоновского рассеяния.

Учитывая перечисленные выше процессы (2)–(11), получим следующую систему уравнений, описывающую изменение числа фотонов и электронов:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \pi(E, x)}{\partial x} &= -\pi(E, x)\mu_\pi(E) + \\ &+ \int_E^\infty \pi(E', x)\varphi_{\pi\pi}(E', E)dE' + \\ &+ \int_E^\infty \gamma(E', x)\varphi_{\gamma\pi}(E', E)dE', \\ \frac{\partial \gamma(E, x)}{\partial x} &= -\gamma(E, x)\mu_\gamma(E) + \\ &+ \int_E^\infty \pi(E', x)\varphi_{\pi\gamma}(E', E)dE' + \\ &+ \int_E^\infty \gamma(E', x)\varphi_{\gamma\gamma}(E', E)dE'. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Для решения системы (12) вместо потерь на столкновения введем непрерывные энергетические потери, приводящие к образованию электронов с энергией, меньшей η_0 . Пренебрежение столкновениями, которые приводят к образованию электронов с энергией, меньшей, чем η_0 , и введение вместо них эквивалентных непрерывных энергетических потерь не изменяет ливневые уравнения в области $E \gg \eta_0$. После введения непрерывных энергетических потерь $\varepsilon(E)$ уравнения (12) принимают следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \pi(E, x)}{\partial x} &= -\pi(E, x)\mu_\pi(E) + \\ &+ \int_E^\infty \pi(E', x)\varphi_{\pi\pi}(E', E)dE' + \\ &+ \int_E^\infty \gamma(E', x)\varphi_{\gamma\pi}(E', E)dE' + \frac{\partial}{\partial E}[\pi(E, x)\varepsilon(E)], \\ \frac{\partial \gamma(E, x)}{\partial x} &= -\gamma(E, x)\mu_\gamma(E) + \\ &+ \int_E^\infty \pi(E', x)\varphi_{\pi\gamma}(E', E)dE' + \\ &+ \int_E^\infty \gamma(E', x)\varphi_{\gamma\gamma}(E', E)dE'. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

В первом приближении ограничим наше рассмотрение областью больших энергий, пренебрежем электронами, которые образовались в результате Комpton-эффекта, и потерями на столкновения, предполагая, что существуют только радиационные

потери и процессы рождения пар. Для вышеприведенных условий

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \pi(E, x)}{\partial x} &= \int_0^1 \left[-\pi(E, x) - \frac{1}{1-\nu} \pi\left(\frac{E}{1-\nu}, x\right) \right] \times \\ &\times \psi_{\text{rad}}(\nu)d\nu + 2 \int_0^1 \gamma\left(\frac{E}{\nu}, x\right) \psi_{\text{pair}}(\nu)d\nu, \\ \frac{\partial \gamma(E, x)}{\partial x} &= \int_0^1 \pi\left(\frac{E}{\nu}, x\right) \psi_{\text{rad}}(\nu) \frac{d\nu}{\nu} - \gamma(E, x)\mu_0, \end{aligned} \right. \quad (14)$$

где $\nu = E/E'$.

Аналитическое решение

Чтобы осуществить переход от системы интегродифференциальных уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, используем интегралы Меллина [4–10] от функций $\pi(E, x)$ и $\gamma(E, x)$ по энергии, т. е. величины

$$\left\{ \begin{aligned} N_\pi(s, x) &= \int_0^\infty E^s \pi(E, x)dE, \\ N_\gamma(s, x) &= \int_0^\infty E^s \gamma(E, x)dE, \end{aligned} \right. \quad (15)$$

где s — комплексный параметр. Интегралы сходятся, так как N_π и N_γ определены для всех значений s . Поскольку $\pi(E, x)$ и $\gamma(E, x)$ тождественно равны нулю для всех энергий вне интервала $(0, E_0)$, нам необходимо рассмотреть сходимость только на нижнем пределе, так как верхний предел представляет собой число. Это означает, что областью сходимости системы (15) является полуплоскость $\text{Re}(s) > s_0$, где $\text{Re}(s)$ — действительная часть s , а s_0 — вещественная постоянная. Не ограничивая общности рассуждений, можно положить $s_0 = 0$.

С помощью пакета MATLAB 5.3 методом перевала [11–12] были получены следующие результаты: (в силу особенностей преобразований они получены в параметрическом виде) если на слой вещества падает электрон, обладающий энергией E_0 , интегральный спектр электронов имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \Pi^{(\pi)}(E_0, E, x) &= \\ &= \left\{ \frac{N_{1\pi}^{(\pi)}(s)}{\sqrt{2\pi} [\lambda_1''(s)x + 1/2s^2]^{1/2}} \right\} \frac{1}{s} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{dE}{E} e^{\lambda_1(s)x}, \\ x &= -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left(\ln\left(\frac{E_0}{E}\right) - \frac{1}{s} \right). \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Учет комptonовского рассеяния производится таким образом, что $\Pi^{(\pi)}$ умножается на выражение

$$K(s, -s). \quad (17)$$

$K(s, -s)$ является решением уравнения в конечных разностях

$$\left[\lambda(s) + A(s+r) - \frac{B(s+r)C(s+r)}{\mu_0 + \lambda(r)} \right] K(s, r) = r(s, r-1). \quad (18)$$

Анализ и обсуждение результатов

Доза формируется следующим образом: при прохождении γ -квантов через вещество они образуют электроны либо в результате Комpton-эффекта (первичная ионизация), либо — рождения пар. Электроны, образованные вследствие этих процессов, в свою очередь либо производят вторичную ионизацию, либо образуют γ -кванты в результате радиационного торможения. В наших оценках вкладом фото- и электроядерных реакций пренебрегаем. Первичные же электроны в свою очередь образуют γ -кванты или вторичные электроны. Таким образом, представляется более перспективным рассчитывать не непосредственно поглощенную дозу, а находить число электронов на заданной глубине. Тогда поглощенную дозу можно вычислить как

$$D(x) \propto \Pi(E_0, 0, x) U_{\text{ion}}, \quad (19)$$

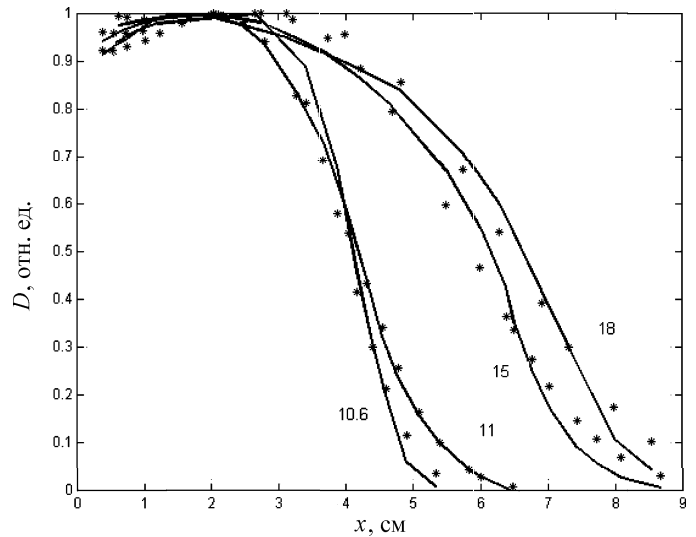
где U_{ion} — потенциал ионизации среды, через которую проходят электроны.

Вычисления, проведенные в математической среде MATLAB, показывают, что в первом приближении ливневую функцию $\Pi(E_0, 0, x)$ можно аппроксимировать следующей кривой (как следует из (16), если совершить предельный переход $E \rightarrow 0$):

$$\begin{cases} D(x) = \exp(-[\alpha(x^3 - \delta^3) + \beta(x^2 - \delta^2) + \gamma(x - \delta)]), \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \approx \ln(E), \end{cases} \quad (20)$$

где параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ вычисляются методом наименьших квадратов из сравнения с экспериментальными результатами. На рисунке представлены точками результаты на основе нашего приближения, а сплошной линией — экспериментальные значения.

Для вычисления параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ были приближены методом наименьших квадратов экспериментальные кривые для следующих значений [13] энергии: $E = 10.6, 11, 15, 18$ МэВ. Также была проверена качественная зависимость параметров от энергии. Исходя из расчетов, они должны зависеть от энергии первичного пучка по логарифмическому закону, но это является следствием упрощений в нашей модели. Тем не менее оценка показала, что они слабо отклоняются от логарифмического закона в том диапазоне энергий, для которого мы делали расчеты, т.е. для диапазона от 10.6 до 18 МэВ. Расчеты показали, что параметры можно записать



Глубинное распределение дозы $D(x)$ для различных энергий электронов. Сравнение экспериментальных расчетов и модельных приближений

в виде:

$$\begin{cases} \alpha \approx -0.05 \ln(E) + 0.16, \\ \beta \approx -0.64 \ln(E) + 1.32, \\ \gamma \approx -0.06 \ln(E) + 0.23, \\ \delta \approx 0.19 \ln(E) + 1.26. \end{cases} \quad (21)$$

Энергия в (21) берется в МэВх.

Заключение

В настоящей работе на основе анализа решения уравнений, описывающих развитие электронно-фотонных ливней в веществе, получены оценки глубинного распределения дозы при прохождении электронов через вещество, а также зависимости от энергии параметров аналитического выражения глубинного распределения дозы. Полученные оценки позволяют описать форму глубинного распределения дозы от 5 до 25 МэВ. Настоящий подход также позволяет с хорошей точностью (максимальное отклонение не более 6%, площади под кривыми отличаются не более чем на 4%) осуществлять экстраполяцию распределения дозы на более высокие энергии.

Литература

1. Stearns M. // Phys. Rev. 1949. **76**. P. 836.
2. Bhabha H.J. // Proc. Roy. Soc. 1936. **A154**. P. 195.
3. Moeller C., Ann D. // Phys. Rev. 1932. **14**. P. 531.
4. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., 1989.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1988.
6. Волковиский Л.И., Луц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., 1975.

7. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций. М., 1969.
8. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М., 1968.
9. Картан Анри. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких переменных. М., 1963.
10. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексного переменного. М., 1973.
11. Федорюк М.В. Метод перевала. М., 1977.
12. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., 1968.
13. Dusseau L., Ranchoux G., Polge G. et al. High Energy Electrons Dose-Mapping Using Optically Stimulable luminescent Films. NSREC, 1999.

Поступила в редакцию
21.11.03