

УДК 531.5

## ОБРАЗОВАНИЕ ЛОВУШЕЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧЕРНЫХ ДЫР

О. И. Василенко

(кафедра общей ядерной физики)

E-mail: vasilenko@depni.sinp.msu.ru

**В рамках классической гравитации изучено образование ловушечной поверхности в  $D$ -мерном пространстве-времени при лобовом столкновении двух ультрарелятивистских частиц, которые описываются как ударные волны Айчельбурга–Сексла. Во внутренней области между волнами найден вид ловушечной поверхности из условия локальной максимальности ее объема. Сформулированы адекватные граничные условия непрерывности на фронтах. Получены и проанализированы зависимости, описывающие формирование и временную динамику горизонта.**

### Введение

В последнее время проявляется значительный интерес к процессам образования черных дыр при столкновениях ультрарелятивистских частиц. Возможность этого была отмечена в работах Амати, Сиафалони, Венециано [1] и Хоффта [2]. В работе [3] Арефьева, Вишванатан и Волович исследовали подобную задачу, используя дуальность Чандрасекара–Феррари–Ксантопулоса между решением Керра для черной дыры и сталкивающимися плоскими гравитационными волнами. Новый интерес к проблеме возник после предложенного Аркани–Хамедом, Димопулосом и Двали [4] разрешения проблемы иерархии, основанного на введении дополнительных измерений, с протяженностью, превышающей характерный размер слабого взаимодействия. В этом случае величина массы Планка может составить несколько ТэВ, что позволило бы обнаружить связанные с существованием дополнительных измерений эффекты в экспериментах с космическими лучами и астрофизических наблюдениях.

В работе [5] Эрдли и Гиддингс развили подход, основанный на использовании ловушечной поверхности [6, 7], в  $D$ -мерной гравитации для вычисления сечения рождения черной дыры при столкновении двух безмассовых высокоэнергичных частиц, которые описывались как ударные волны Айчельбурга–Сексла [8, 9]. В работе [10] Йошино и Намбу исследовали эту же задачу в случае лобового столкновения, используя сечение  $T = \text{const}$  пространства-времени в области между волнами для описания процесса формирования горизонта. Однако в качестве граничных условий на поверхности ударных волн они выбрали условия непрерывности производных, что привело к разрыву ловушечной поверхности. Поскольку последняя должна быть непрерывной [6, 7], их последующие расчеты физически неверны.

В данной работе, посвященной изучению той же задачи, используется аналогичное [10] сечение

пространства-времени для анализа появления и эволюции непрерывной ловушечной поверхности. Дан независимый вывод уравнения для ловушечной поверхности, проясняющий ее связь с минимальными поверхностями.

Столкновение с ненулевым прицельным параметром рассмотрено в работе [11] для случая  $D = 4$ .

### Метрика

Рассмотрим две ультрарелятивистские частицы, движущиеся в пространстве Минковского с координатами  $(\bar{t}, \bar{z}, \bar{x}^i)$  вдоль оси  $\bar{z}$  навстречу друг другу с нулевым прицельным параметром ( $\bar{x}^i = 0$ ). Введем координаты светового конуса:  $\bar{u} = \bar{t} - \bar{z}$ ,  $\bar{v} = \bar{t} + \bar{z}$ . В предельном ультрарелятивистском случае для частицы с исчезающе малой массой и фиксированной энергией  $\mu$ , движущейся в направлении  $+z$ , метрика описывается решением для ударной волны Айчельбурга–Сексла [8]

$$ds^2 = -d\bar{u}d\bar{v} + d\bar{x}^i{}^2 + \Phi(\bar{x}^i)\delta(\bar{u})d\bar{u}^2. \quad (1)$$

Функция  $\Phi$  зависит только от поперечного радиуса  $\bar{r} = \sqrt{\bar{x}^i\bar{x}^i}$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi &= -2a \ln(\bar{r}) \quad \text{при } D = 4; \\ \Phi &= \frac{2a^{D-3}}{(D-4)\bar{r}^{D-4}} \quad \text{при } D > 4, \\ a &= \left( \frac{8\pi G_D \mu}{\Omega_{D-3}} \right)^{1/(D-3)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Omega_{D-3}$  — объем единичной  $(D-3)$ -мерной сферы и  $G_D$  —  $D$ -мерная гравитационная постоянная. Сингулярность в метрике (1) можно устранить введением новых координат  $(u, v, x^i)$ :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u, \quad \bar{v} = v + \Phi\theta(u) + \frac{u\theta(u)(\nabla\Phi)^2}{4}, \\ \bar{x}^i &= x^i + \frac{u}{2}\nabla_i\Phi(x)\theta(u), \end{aligned} \quad (3)$$

(здесь  $\theta$  — функция Хевисайда). В этих координатах геодезические и их касательные непрерывны на фронте волны при  $u = 0$ . Метрика (1) является плоской везде, кроме фронта волны при  $u = 0$ . Поэтому метрику для двух ударных волн для моментов времени  $t < 0$ , предшествующих столкновению, можно получить, объединив (1) с аналогичной метрикой для частицы, движущейся вдоль  $\bar{v} = 0$  в направлении  $-z$ , и отождествив области между волнами. В координатах (3) объединенная метрика имеет вид

$$ds^2 = -du dv + (H_{ik}^u H_{jk}^u + H_{ik}^v H_{jk}^v - \delta_{ij}) dx^i dx^j, \quad (4)$$

$$H_{ij}^u = \delta_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^i \partial x^j} u \theta(u), \quad (5)$$

$$H_{ij}^v = \delta_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^i \partial x^j} v \theta(v).$$

### Внутренняя ловушечная поверхность

Критерием образования черной дыры при столкновении частиц служит появление области пространства, которую не могут покинуть световые лучи. Границей этой области и является ловушечная поверхность. Более строгое определение следующее [6]: ловушечная поверхность  $\mathcal{T}$  — это замкнутая пространственноподобная  $(D - 2)$ -поверхность, такая, что световые геодезические, пересекающие ее ортогонально, локально сходятся в направлении будущего. Из определения следует, что объем перенесенной  $(D - 2)$ -поверхности, образованной точками ортогональных к  $\mathcal{T}$  нулевых геодезических, расположенными на равных расстояниях от  $\mathcal{T}$ , должен уменьшаться при удалении от  $\mathcal{T}$ .

Далее мы будем использовать следующее сечение пространства-времени: область  $I$ : ( $t = z, t \leq T$ ); область  $II$ : ( $t = T, T \leq z \leq -T$ ); область  $III$ : ( $t = -z, t \leq T$ ). Здесь  $T \leq 0$  и столкновение частиц происходит при ( $T = 0, z = 0$ ).

Согласно выбранному сечению ловушечную поверхность  $\mathcal{M}$  в области  $II$  можно определить соотношениями:  $t = T = \text{const}, z = \delta f(r), \delta = \text{sgn } z$ . Нулевые нормали  $N$  к этой поверхности имеют вид ( $f' = df/dr, \varepsilon = \pm 1$ )

$$N(\varepsilon, \delta) = [N^t, N^z, N^r, \mathbf{N}^\varphi] (\varepsilon, \delta) = \left[ 1, -\frac{\varepsilon \delta}{\sqrt{1 + f'^2}}, \frac{\varepsilon f'}{\sqrt{1 + f'^2}}, \mathbf{0} \right]. \quad (6)$$

Нулевая геодезическая, нормально пересекающая ловушечную поверхность в точке  $(T, z_0 = f(r_0) \equiv f_0, r_0, \varphi_0)$ , является прямой линией, описываемой уравнениями

$$t = T + \tau, \quad z = \delta f_0 - \tau \frac{\varepsilon \delta}{\sqrt{1 + f_0'^2}}, \quad (7)$$

$$r = r_0 + \tau \frac{\varepsilon f_0'}{\sqrt{1 + f_0'^2}}, \quad \varphi = \varphi_0.$$

Подобные геодезические переносят ловушечную поверхность  $\mathcal{M}$  на расстояние  $\tau$ . Обозначим перенесенную поверхность через  $\mathcal{M}(\varepsilon, \tau)$ . Ее объем  $S(\varepsilon, \tau)$  равен

$$S(\varepsilon, \tau) = \Omega_{D-3} \int r^{D-3} dl, \quad (8)$$

где  $dl$  — элемент образующей поверхности  $\mathcal{M}(\varepsilon, \tau)$  в плоскости  $(z, r)$ , который, согласно (7), может быть выражен через не зависящий от  $\tau$  элемент  $dr_0$  как

$$dl = \sqrt{dr^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dr_0}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr_0}\right)^2} dr_0 = \sqrt{1 + f_0'^2} \left[ 1 + \frac{\tau \varepsilon f_0''}{(1 + f_0'^2)^{3/2}} \right] dr_0. \quad (9)$$

Для малых  $\tau$  выражение (8) может быть записано в форме

$$S(\varepsilon, \tau) = \Omega_{D-3} \int r_0^{D-3} \sqrt{1 + f_0'^2} \times \left\{ 1 + \frac{\tau \varepsilon}{\sqrt{1 + f_0'^2}} \left[ \frac{(D-3)f_0'}{r_0} + \frac{f_0''}{1 + f_0'^2} \right] + O(\tau^2) \right\} dr_0. \quad (10)$$

Согласно определению ловушечной поверхности, уравнение для функции  $f(r)$  можно получить из требования, чтобы для малых  $\tau$  объем  $S(\varepsilon, \tau)$  уменьшался при увеличении  $\tau$  для обоих значений  $\varepsilon = \pm 1$ . Необходимым условием этого является равенство нулю линейного по  $\tau$  члена в правой части соотношения (10). Интегрирование получающегося уравнения дает явную форму соотношения, описывающего внутреннюю ловушечную поверхность

$$z = \delta R \int_1^{r/R} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^{2(D-3)} - 1}}, \quad (11)$$

где  $R = R(T)$  — радиус поверхности при  $z = 0$ . В случае  $D = 4$  поверхность представляет собой катеноид:  $r = R \cosh(z/R)$ .

### Формирование ловушечной поверхности

С точки зрения наблюдателя, во внешних областях ( $|z| > -t$ ) столкновение происходит при

$$\bar{u} = +0, \quad \bar{v} = +0. \quad (12)$$

Поскольку метрика в этих областях минковская и задача аксиально симметрична, то нулевые геодезические ортогональные плоскости (12) являются параллельными прямыми, имеющими нулевое схождение. Таким образом, плоскость (12) удовлетворяет условиям, предъявляемым к ловушечной поверхности, и уравнения (12) можно рассматривать как соотношения, определяющие ее вид на фронтах, т. е. в областях  $I$  и  $III$ . В новых координатах  $(u, v, r, \varphi^k)$

уравнения ловушечной поверхности в области  $I$  с нулевыми нормальными  $n = [n^u, n^v, n^r, \mathbf{n}^\varphi]$ , согласно (3), (12), принимают вид

$$u = +0, \quad v + \Phi(r) - \Phi(r_c) = 0, \quad (13)$$

$$n_1 = [0, 1, 0, \mathbf{0}], \quad n_2 = \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^{D-3}, \left( \frac{a}{r} \right)^{D-3}, 1, \mathbf{0} \right].$$

Аналогично описывается ловушечная поверхность в области  $III$ :

$$v = +0, \quad u + \Phi(r) - \Phi(r_c) = 0, \quad (14)$$

$$n_3 = [1, 0, 0, \mathbf{0}], \quad n_4 = \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^{D-3}, \left( \frac{r}{a} \right)^{D-3}, 1, \mathbf{0} \right].$$

Гладкость перехода от (13) к (14) обеспечивается при выполнении в момент столкновения  $u = v = 0$  равенства  $n_2 = n_4$ . Это условие определяет радиус  $r_c$  ловушечной поверхности в момент столкновения  $r_c \equiv r_b(T=0) = a$ .

Требую непрерывности ловушечной поверхности на границе областей  $I$  и  $II$  и принимая во внимание (13) и (11), получаем уравнения для  $R(T)$  и радиуса ловушечной поверхности на границе  $r_b(T)$ :

$$T = \frac{1}{2} [\Phi(a) - \Phi(r_b)] = -R \int_1^{r_b/R} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^{2(D-3)} - 1}}. \quad (15)$$

Такие же соотношения получаются при рассмотрении границы областей  $II$  и  $III$ .

В работе [10], где изучалась эта же задача, вместо условия непрерывности ловушечной поверхности на границах области  $II$  использовано условие непрерывности ее нулевых нормалей, видимо, по аналогии с таким же условием для момента столкновения. В результате полученная в [10] ловушечная поверхность оказалась разрывной, что противоречит как ее определению, так и физическим представлениям о свойствах горизонта формирующейся черной дыры. Отметим, что оба условия непрерывности (поверхности и ей нулевых нормалей) не могут выполняться одновременно, поскольку это приведет к переопределенности получающейся системы уравнений. В нашем подходе нормали  $N(1, -1)$  и  $n_2$  [ $N(1, 1)$  и  $n_4$ ] не равны на границах области  $II$ , так что найденная ловушечная поверхность непрерывна, но не гладка на границах. Последнее является следствием использования предельного перехода в описании частиц как ударных волн.

Зависимости  $R$  от  $T$  для  $D = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  показаны на рис. 1. Ловушечная поверхность появляется в момент времени  $t = T_{\min}$ , когда  $r_b = r_b(T_{\min})$ . Далее  $r_b$  увеличивается с ростом  $T$  (рис. 2) и достигает своего максимального значения  $a$  к моменту столкновения  $T = 0$ . Зависимости  $T_{\min}$ ,  $R(T_{\min})$  и  $r_b(T_{\min})$  от  $D$  представлены в таблице.

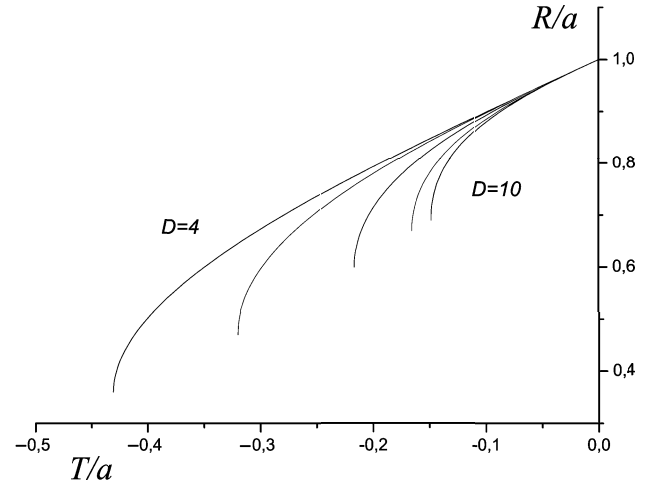


Рис. 1. Зависимости  $R$  от  $T$  для  $D = 4, \dots, 10$

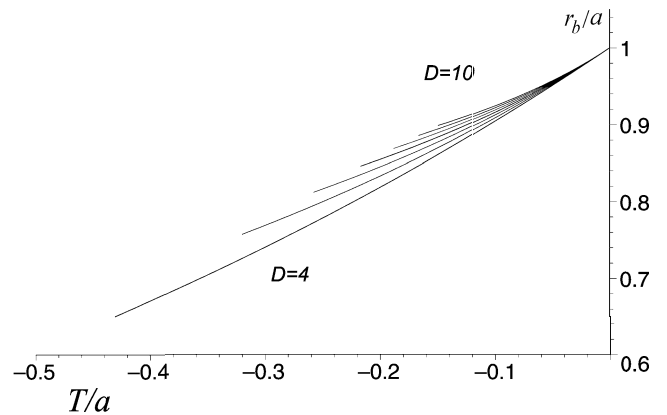


Рис. 2. Зависимости  $r_b$  от  $T$  для  $D = 4, \dots, 10$

Зависимости  $T_{\min}$ ,  $R(T_{\min})$ ,  $r_b(T_{\min})$  от  $D$

$D$	$T_{\min}/a$	$R_{\min}/a$	$r_b(T_{\min})/a$
4	-0.43	0.36	0.65
5	-0.32	0.47	0.76
6	-0.26	0.54	0.81
7	-0.22	0.60	0.85
8	-0.19	0.64	0.87
9	-0.17	0.67	0.89
10	-0.15	0.69	0.90

## Заключение

Из условия максимальности объема ловушечной поверхности найден ее явный вид (11) в области между фронтами. На фронтах вид поверхности задается просто их уравнениями в момент столкновения  $\bar{u} = +0$ ,  $\bar{v} = +0$  (12). Из условий непрерывности ловушечной поверхности на границах внутренней области  $II$  получены зависимости  $R$  — радиуса ловушечной поверхности при  $z = 0$  и  $r_b$  — ее радиуса на границах от  $T$  для  $D = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ , которые показаны на рис. 2. Согласно полученным результатам, процесс образования ловушечной поверхности выглядит следующим образом. Она воз-

никает в момент времени  $t = T_{\min}$  с радиусом  $r_b$ , равным  $r_b(T_{\min})$ . Величины  $T_{\min}$ ,  $R(T_{\min})$  и  $r_b(T_{\min})$  растут с увеличением  $D$  (таблица). Далее  $r_b$  и  $R$  увеличиваются со временем и достигают своих максимальных значений  $a$  в момент столкновения.

Автор признателен И. Я. Арефьевой за обсуждение результатов работы.

#### Литература

1. *Amati D., Ciafaloni M., Veneziano G.* // Phys. Lett. 1987. **B197**. P. 81; Phys. Lett. 1989. **B216**. P. 41; Int. J. Mod. Phys. 1989. **A3**. P. 1615.
2. *'t Hooft G.* // Phys. Lett. 1987. **B198**. P. 61; Nucl. Phys. 1998. **B304**. P. 867.
3. *Aref'eva I.Ya., Viswanathan K.S., Volovich I.V.* // Nucl. Phys. 1995. **B452**. P. 346; Erratum-ibid. 1996. **B462**. P. 613 (arXiv:hep-th/9412157).
4. *Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G.* // Phys. Lett. 1998. **B429**. P. 263 (arXiv:hep-ph/9803315); Phys. Rev. 1999. **D59**. P. 086004 (arXiv:hep-ph/9807344).
5. *Eardley D.M., Giddings S.B.* // arXiv:gr-qc/0201034.
6. *Penrose R.* Structure of Space-Time. In Battelle Rencontres (eds. C.M. DeWitt, J.A. Wheeler). N. Y., 1968.
7. *Hawking S.W., Ellis G.F.R.* The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge, 1973.
8. *Aichelburg P.C., Sexl R.U.* // Gen. Rel. Grav. 1971. **2**. P. 303.
9. *Dray T., 't Hooft G.* // Nuclear Physics. 1985. **B235**. P. 173.
10. *Yoshino H., Nambu Y.* // Phys. Rev. 2002 **D66**. P. 065004 (arXiv:gr-qc/0204060).
11. *Vasilenko O. I.* // arXiv:hep-th/0407092.

Поступила в редакцию  
22.12.03