УДК 539.12.01

ФЕРРОМАГНИТНОЕ СОСТОЯНИЕ $SU(2)$-ВАКУУМА

В. Ч. Жуковский, О. В. Тарасов

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: zhukovsk@phys.msu.su

Рассмотрены условия, при которых возможно ферромагнитное состояние вакуума. Показано, что конденсация тахионных мод в пространственно однородное состояние возможно при ограничении длины поля. Исследован вопрос о фазовом переходе между ферромагнитным и сверхпроводящим состояниями.

1. Для объяснения различных непертурбативных явлений в квантовой теории неабелевых полей особенно важную роль приобретают калибровочные конфигурации, являющиеся решениями уравнений Янга–Миллса и локально мимимизирующие калибровочное действие. Одним из решений этих уравнений является постоянное хромомагнитное поле [1]. В статье [2] показано, что при определенных плотностях фермионов, взаимодействующих с полем, им энергетически выгоднее располагаться на уровнях Ландау при ненулевом хромомагнитном поле («ферромагнитное» состояние), чем внутри сферы Ферми при отсутствии хромомагнитного поля. Однако постоянное хромомагнитное поле, являясь решением уравнений Янга–Миллса, не минимизирует действия ввиду наличия тахионных мод. Эта проблема исследовалась во многих работах (одни из последних — [2, 3]). В настоящей статье делается попытка исследовать фазовый переход между ферромагнитным состоянием вакуума и фазой, в которой хромомагнитного поля нет.

2. Рассмотрим чисто калибровочную теорию с группой $SU(2)$ в $(3+1)$-мерном пространстве. Лагранжиан $L=-1/4F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}$ можно переписать в виде, демонстрирующем взаимодействие заряженного векторного поля с «электромагнитным»:

$$\begin{aligned} L=-\frac{1}{4}f^2_{\mu\nu}-\frac{1}{2}|(D_\mu\Phi_\nu-D_\nu\Phi_\mu)|^2-\\ -ief_{\mu\nu}\Phi^+{}_\mu\Phi_\nu+\frac{e^2}{4}(\Phi^+{}_\mu\Phi_\nu-\Phi^+{}_\nu\Phi_\mu)^2, \end{aligned} \qquad (1)$$

где введены следующие обозначения: $A_\mu=A^3_\mu$ — нейтральное («электромагнитное») поле; $\Phi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^1_\mu+iA^2_\mu)$ — заряженное поле, $D_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu$.

«Электромагнитное» поле, являющееся в нашей задаче постоянным хромомагнитным, направим вдоль оси z, калибровку выберем в несимметричном виде, а заряженное поле — пока нулевым:

$$\begin{aligned} A_\mu=(A_0,\mathbf{A})=(0,(0,x_1B,0)),\\ \Phi_\mu=\Phi^+{}_\mu=0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Этот набор (A,Φ) является решением уравнений поля. Однако если искать отличные от нуля решения уравнений движения для заряженного поля Φ во внешнем хромомагнитном поле A_μ, то решения можно записать в виде $\Phi_\mu = \mathrm{e}^{-iEx_0+ik_3x_3+ik_2x_2} f_{n\mu}(x_1-k_2/eB)$. Соответствующий им энергетический спектр имеет вид (см., напр., [4])

$$E^2=k_3^2+2eB(n+\frac{1}{2})\pm 2eB, \qquad (3)$$

где $n=0,1,2,\ldots$ Как видно, энергия становится мнимой при ориентации спина, соответствующей знаку «$-$», $n=0$ и $k_3^2<eB$ (тахионные моды). Наличие таких энергий демонстрирует нестабильность данной конфигурации относительно сдвигов вдоль тахионных мод, соответствующих этим энергиям [5].

В работах [2, 3] предлагается метод, с помощью которого удается, спускаясь вдоль тахионных мод, достигнуть однородного квантового состояния Холла. При этом направление спуска определяется как раз условием однородности конечного решения. Выбираются лишь моды с $k_3=0$, так как не должно быть зависимости от x_3. Для того чтобы не было зависимости от x_2, необходимо усреднение по всем возможным значениям k_2. Легко видеть при этом, что возбуждаются самые «жесткие» моды. Решение ищется в виде функций, не зависящих от x_3:

$$\Phi_\mu(x)=\Phi_\mu(x_0,x_1,x_2)\sqrt{l}, \qquad (4)$$

где l — длина хромомагнитного поля вдоль оси x_3. С учетом того что у тензора поля отлична от нуля лишь компонента f_{12}, нестабильная мода может быть описана следующим эффективным лагранжианом для скалярного поля φ:

$$L_{\mathrm{eff}}=-\frac{1}{2}|D_\mu\varphi|^2+2eB\varphi^2-\frac{e^2}{2l}\varphi^4. \qquad (5)$$

Лагранжиан (5) похож на хиггсовский, если рассматривать член взаимодействия с хромомагнитным полем как отрицательный квадрат массы. Единственное и очень важное отличие состоит в том, что взаимодействие с внешним полем входит также и в ковариантные производные. В результате решений уравнений поля, однородных в пространстве, для этого лагранжиана не имеется. Чтобы обеспечить их наличие, в [2] применен тот же метод, что и в [6] для случая фермионов. Смысл его в том, что совершается переход к другой эффективной (2+1)-мерной модели с черн-саймоновским членом, описывающей новые бозоны φ_a:

$$L_{\text{eff}} = -\frac{1}{2}|(i\partial_\mu - eA_\mu + a_\mu)\varphi_a|^2 + 2eB\varphi_a^2 - \\ - \frac{e^2}{2l}\varphi_a^4 + \frac{\epsilon_{\mu\nu\lambda}}{4\alpha}a_\mu\partial_\nu a_\lambda. \tag{6}$$

Как известно [7], черн-саймоновский член изменяет статистику частиц, прикрепляя к ним дополнительный магнитный поток, и делает ее, вообще говоря, дробной в зависимости от парамера α. Сохраняется статистика лишь при $\alpha = 2\pi k$, где k — целое число. В [2, 6] указано, что этого достаточно для того, чтобы динамики (5) и (6) были эквивалентны. Поле φ_a описывает новые бозоны, которые конденсируются на пространственно-однородном решении: $\varphi_a = v = \text{const}$. Это решение возникает, когда черн-саймоновское поле a_μ полностью компенсирует магнитное поле A_μ в ковариантных производных, что делает модель чисто хиггсовской: $a_i = eA_i$.

Надежной гарантией того, что найденное решение является истинным вакуумом, т. е. устойчиво также и относительно неоднородных вдоль хромомагнитного поля возмущений, является отсутствие тахионных мод с импульсом $k_3 \neq 0$.

Из (3) следует, что нестабильными будут все моды с $n = 0$, $s = -1/2$ и $k_3^2 < eB$. Для того чтобы не существовало тахионных мод с $k_3 \neq 0$, достаточно сделать протяженность поля вдоль оси z конечной. В этом случае, накладывая на заряженное поле периодические условия вдоль этой оси $A_\mu^{1,2}(0) = A_\mu^{1,2}(L_3)$, мы получаем условие дискретизации импульса: $k_3 = 2\pi n_3/L_3$. Для избавления от тахионных мод с $k_3 > 0$ необходимо потребовать, чтобы самые низколежащие неоднородные моды ($n_3 = \pm 1$) обладали все же уже положительным квадратом энергии, а это в свою очередь накладывает физическое ограничение на максимально возможную протяженность хромомагнитного поля:

$$\left(\frac{2\pi}{L_3^{\max}}\right)^2 = eB. \tag{7}$$

Само по себе хромомагнитное поле не нарушает цветовой симметрии. Однако ее нарушает наличие конденсата заряженного поля. Поскольку допустимы лишь бесцветные состояния системы, то приходим к выводу, что в чисто калибровочной теории такое состояние невозможно. Согласно [2], необходимо ввести еще поле кварков, которое являлось бы поставщиком заряда, восстанавливая цветовую симметрию.

3. Как показано выше, калибровочную конфигурацию из постоянного хромомагнитного поля и заряженного однородного конденсата следует рассматривать не саму по себе, а во взаимодействии с фермионами. Мы будем рассматривать безмассовые фермионы в фундаментальном представлении. Они описываются уравнением Дирака

$$i\gamma_\mu D_\mu \Psi = 0, \tag{8}$$

где $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. В поле каждой калибровочной конфигурации уравнение Дирака будет приводить к своему энергетическому спектру. Фермионы, обладающие конечной плотностью, займут в основном состоянии некоторое количество нижних уровней. Их полная энергия, являющаяся суммой энергий всех занятых уровней, будет зависеть от внешнего поля. Ограничения сводятся к следующему: пространство $(3+1)$-мерно, но ограничено по оси z интервалом $(0, L_3)$, где $L_3 = L_3^{\max} = 2\pi/\sqrt{eB}$, система должна быть зарядово нейтральна. Наша цель — исследовать ее для случая постоянных хромомагнитных полей с учетом тех ограничений, которые были сделаны при рассмотрении бозонного сектора, и ответить на вопрос о фазовом переходе между сверхпроводящим и ферромагнитным состоянием вакуума. Другими словами, будет ли энергетически выгодно, не меняя L_3, «выключить» хромомагнитное поле?

Для случая с внешним полем или без него сначала определим «энергию Ферми» из равенства

$$N = \sum_\lambda \Theta(E_F - E_\lambda), \tag{9}$$

где λ — набор квантовых чисел собственных функций оператора Дирака в данном поле. Полная энергия определяется как

$$E_{\text{tot}} = \sum_\lambda \Theta(E_F(N) - E_\lambda)E_\lambda. \tag{10}$$

Решения свободного уравнения Дирака имеют вид плоских волн и задаются квантовыми числами: $\lambda = c, s, \epsilon, k_1, k_2, k_3$, где $c, s, \epsilon = \pm 1$ — цвет, проекция спина и знак энергии, $E_\lambda^2 = \mathbf{k}^2$. Учет условий периодичности сводится к ограничению на значение импульсов: $k_i = 2\pi n_i/L_i$, n_i — целые числа.

Для случая $B \neq 0$ спектр и квантовые числа также хорошо известны: $\lambda = c, s, \epsilon, n, k_2, k_3$,

$$E_\lambda^2 = \frac{e}{2}B(2n + 1 - s) + k_3^2,$$

где учтено, что эффективный заряд $e' = e/2$. Условие периодичности снова определяет возможные значения импульсов, а вид волновой функции ограничивает максимально возможное значене k_2, определяя тем самым степень вырождения по этому квантовому числу.

С учетом (7) можно выписать в единой форме для обоих случаев:

$$N(E_F, L_3) = \frac{4\pi L_1 L_2}{L_3^2} f\left(\frac{E_F L_3}{2\pi}\right), \\ E_{\text{tot}}(E_F, L_3) = \frac{8\pi^2 L_1 L_2}{L_3^3} g\left(\frac{E_F L_3}{2\pi}\right), \tag{11}$$

где f, g — безразмерные функции от безразмерной переменной, определяемые соотношениями

$$
\begin{aligned}
f^{B=0}(x) &= \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} 2\Theta(x^2-n_3^2)(x^2-n_3^2),\\
g^{B=0}(x) &= \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} 4/3\Theta(x^2-n_3^2)(x^3-n_3^3)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

в отсутствие хромомагнитного поля и

$$
\begin{aligned}
f^{B\neq 0}(x) &= \sum_{n_3=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(2-\delta_{n0})\Theta(x^2-n-n_3^2),\\
g^{B\neq 0}(x) &= \sum_{n_3=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(2-\delta_{n0})\Theta(x^2-n-n_3^2)\sqrt{n+n_3^2}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

в присутствии хромомагнитного поля.

Вводя обозначение $h(x)=g(f^{-1}(2\pi^2 x))$, можно выписать полную энергию как

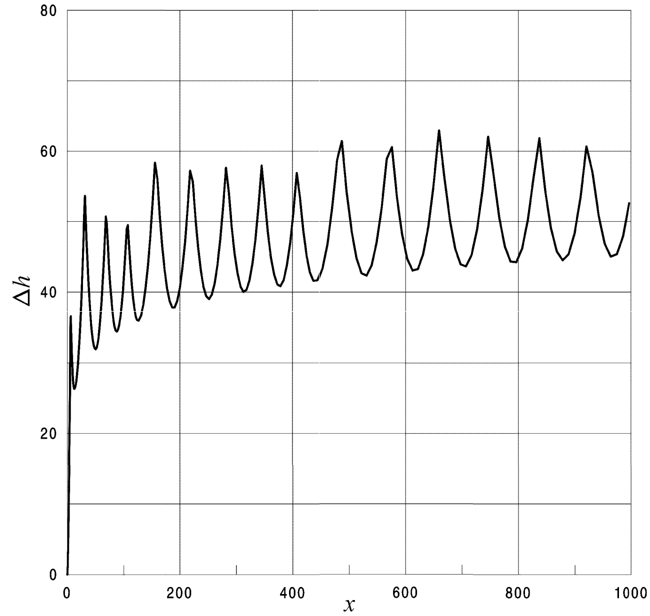
$$E_{\rm tot} = 2e^2B^2Vh(\frac{\rho}{(eB)^{3/2}}), \tag{14}$$

где $\rho = N/V = N/(L_1L_2L_3)$ — плотность фермионов. Зависимость энергии при выключенном магнитном поле от B объясняется тем, что B в нашей задаче выражается через L_3.

Рассмотрим вопрос об энергетической выгодности возникновения хромомагнитного поля. Очевидно, при его генерации энергия фермионов изменится на $-2(eB)^2V\Delta h(\rho/(eB)^{3/2})$, где $\Delta h = h^{B=0}-h^B$. К этому следует добавить энергию хромомагнитного поля. Далее в случае $B=0$ при условии существования механизма эффективного притяжения возможен выигрыш энергии за счет эффекта сверхпроводимости цвета [8] (о влиянии хромомагнитного поля на эффект сверхпроводимости цвета и нарушение киральной симметрии см. [9]): фермионы, находящиеся на поверхности Ферми, образуют куперовские пары и выигрывают энергию $V2\pi\rho^{2/3}\Delta^2$, где Δ — энергия связи куперовской пары. Таким образом, полное изменение энергии за счет включения магнитного поля имеет вид

$$
\begin{aligned}
\Delta E = VB^2(-2e^2\Delta h\Big(\frac{\rho}{(eB)^{3/2}}) + \frac{1}{8\pi} +\\
+\frac{2\pi\rho^{2/3}\Delta^{2/3}}{B^2}\Big).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Функция $\Delta h(x)$ найдена численно и изображена на рисунке. Как видно, она является положительной, испытывает частые осцилляции, связанные с дискретностью уровней Ландау. Вопрос о выгодности ферромагнитной фазы зависит от того, насколько успешно отрицательный член в (15), отражающий выигрыш энергии фермионами за счет пересадки с уровней, соответствующих нулевому магнитному полю, на уровни Ландау, сможет конкурировать с положительными членами, отражающими энергетические затраты на создание хромомагнитного поля, а также потери, связаные с исчезновением механизма сверхпроводимости.



Функция $\Delta h(x)$

Видно, что конкуренция первых двух членов сводится к вопросу о том, насколько велика постоянная связи. Например, если мы устремим характерный размер системы L_3 к нулю, то бегущая постоянная связи устремится к нулю, и создание магнитного поля станет невыгодно. Таким образом, это указывает на ограничение снизу на L_3 (и на ограничение сверху на B).

Конкуренция первого и третьего членов определяется значением плотности фермионов. Условие энергетической выгодности ферромагнитного состояния накладыват ограничение сверху на плотность фермионов.

В дальнейшем авторы планируют разобрать более реалистичную модель, что позволит дать конкретные оценки перечисленным фактам и более четко ответить на вопрос о возможности существования ферромагнитной фазы вакуума КХД.

Литература

1. *Savvidy G.K.* // Phys. Lett. 1977. **71B**. P. 133.
2. *Iwazaki A., Murimatsu O.* // nucl-th/0304005.
3. *Iwazaki A, Murimatsu O., Nishikawa T., Ohtani T.* // hep-ph/0309066.
4. *Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В.* Калибровочные поля. М., 1986.
5. *Nielsen N. K., Olesen P.* // Nucl.Phys. V. B160, P. 330, 1998.
6. *Zhang S. C., Hanson H., Kivelson S.* // Phys. Rev. Lett. 1989. **62**. P. 82.
7. *Semenoff G.W.* // Phys. Rev. Lett. 1988. **61**. P. 516.
8. *Rajagopal K., Wilczek F.* // hep-ph/0011333.
9. *Ebert D., Khudyakov V.V., Zhukovsky V.Ch., Klimenko K.G.* // Phys. Rev. 2002. **D65**. P. 054024.

Поступила в редакцию
12.05.04