ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 535.317:621.378

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ САМОВОСПРОИЗВОДЯЩИХСЯ ДИФФРАКТАЛОВ

П. В. Короленко, Е. В. Поздеева, О. В. Саенко

(*кафедра оптики и спектроскопии*)

E-mail: korolenko@optics.npi.msu.su

Рассмотрено проявление эффекта Тальбо при распространении периодических диффракталов — волн, изначально имеющих однородное распределение амплитуды и фрактальное распределение фазы. Показано, что стандартные отклонения фазы и интенсивности по поперечным координатам претерпевают вдоль направления распространения диффрактала глубокую периодическую модуляцию. При этом фрактальные размерности распределений фазы и интенсивности не испытывают существенных изменений.

Исследование процессов дифракционного преобразования амплитудно-фазовой структуры светового излучения с изначально стохастическими возмущениями волнового фронта составляет важный раздел статистической оптики [1, 2]. В фундаментальной работе М. Берри [3] был, по-видимому, впервые рассмотрен новый аспект теории дифракции случайных полей, относящийся к волнам, имеющим в начальной плоскости фрактальное распределение фазы световых колебаний при однородном распределении интенсивности. Такие волны М. Берри назвал диффракталами.

В данной работе, в отличие от [3], рассмотрены характеристики диффракталов, которые имеют в поперечном сечении периодическую структуру поля. Цель исследования состояла в оценке и сопоставлении характера изменений амплитудно-фазовых возмущений и фрактальных признаков в структуре таких диффракталов в процессе их распространения. В силу эффекта Тальбо [4] периодические диффракталы обладают свойством самовоспроизведения первоначального амплитудно-фазового распределения. Отметим, что в последнее время интерес к изучению особенностей проявления эффекта Тальбо в разнообразных световых структурах и оптических системах заметно вырос. Это связано со все более широким использованием этого эффекта в лазерных и метрологических устройствах [5–8]. Появились данные [9], что волны с самовоспроизводящейся структурой могут играть важную роль в процессах лазерной биостимуляции.

Все приведенные ниже результаты расчетов относятся к одномерным возмущениям волнового фронта. При моделировании начального распределения фазы Φ_k диффрактала использовалась функция Вейерштрасса [10]

$$\Phi_k = \frac{\sqrt{2}\sigma_0\left[1-b^{2(D-2)}\right]^{1/2}}{\left[1-b^{2(D-2)(N+1)}\right]^{1/2}}\times \sum_{n=0}^{N} b^{(D-2)n}\cos(2\pi s b^n k+\psi_n). \qquad (1)$$

Здесь σ_0 — стандартное отклонение фазы световых колебаний в начальной плоскости от фазы плоской волны, b, s — масштабирующие параметры (при целочисленном значении параметра b функция (1) становится периодической с периодом $a = s^{-1}$), ψ_n — случайная фаза, равномерно распределенная на интервале $[0, 2\pi], D$ — фрактальная размерность графика функции Вейерштрасса, индекс k характеризует распределение значащих точек по поперечной координате. При проведении расчетов полагалось, что число гармоник $N_g = N+1$ функции (1) конечно и тем самым ее производная в каждой точке имеет определенное значение. Это существенно отличает рассматриваемую модель диффрактала от модели [3], в которой при $N\to\infty$ распределение фазы Φ_k задается непрерывной, но нигде не дифференцируемой функцией. Из формулы (1) видно, что начальное распределение фазы самовоспроизводящегося диффрактала включает элементы регулярности и случайности. Первые обусловлены периодичностью фазового распределения по поперечной координате, вторые — случайным характером изменения фазы в пределах периода.

Распределение светового поля диффрактала в начальной плоскости задавалось в виде

$$U_{0,k} = A\exp\left\{i\Phi_k\right\}, \qquad (2)$$

где амплитуда A имеет постоянное значение (в дальнейшем для простоты полагается, что величина $A = 1$). Если распределение (2) периодично, то для анализа флуктуаций излучения могут быть использованы представления дробного эффекта Тальбо [11]. Согласно этому эффекту, на расстояниях от начальной плоскости $z = \frac{z_0}{4q}$ (z_0 — расстояние самовоспроизведения начальной структуры поля, связанное с ее периодом a и длиной волны λ соотношением

$z_0 = 2a^2/\lambda;\ q = 1, 2, \ldots$) структура поля представляет собой суперпозицию смещенных относительно друг друга по поперечной координате и сдвинутых по фазе начальных распределений световой волны. Для распределения поля в указанных плоскостях справедливо выражение [11]

$$U_k = e^{(-i\frac{\pi}{4})}\frac{1}{\sqrt{2q}}\sum_{m=0}^{2q-1}\left(e^{i\frac{\pi}{2q}m^2}U_{o,k+m\frac{a}{2q}}\right). \qquad (3)$$

Расчет поля диффрактала на основе выражения (3) хотя и обеспечивает высокую точность как при слабых, так и при сильных флуктуациях, но обладает ограниченными возможностями, поскольку позволяет определять амплитуду и фазу лишь в строго определенных плоскостях. Поэтому наряду с формулой (3) для слабых флуктуаций, когда $\sigma_0 \ll 1$, использовалось выражение

$$U_k = \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{p=-\infty}^{-1} J_{|p|}(b^{(D-2)n}\zeta)(-1)^{|p|}\times \right. \\ \times e^{-i(2\pi b^n(zp^2b^n - skp) - p\xi_n)} + \qquad (4) \\ \left. + \sum_{p=0}^{+\infty} J_p(b^{(D-2)n}\zeta)e^{-i(2\pi b^n(zp^2b^n - skp) - p\xi_n)}\right) - N,$$

где $\varsigma = \frac{\sqrt{2}\sigma_0\left[1-b^{2(D-2)}\right]^{1/2}}{\left[1-b^{2(D-2)(N+1)}\right]^{1/2}}$, $\xi_n = \psi_n + \pi/2$, $J_p(X)$ — функция Бесселя порядка p. Поскольку функция Вейерштрасса (1) представляет сумму гармонических функций, формулу (4) можно легко получить, если воспользоваться элементами теории, описывающей дифракцию волны с синусоидальной модуляцией волнового фронта [2].

Формула (4) может быть также приведена к виду

$$U_k = \prod_{n=0}^{N}\left(\sum_{p=-M}^{-1} J_{|p|}(b^{(D-2)n}\zeta)(-1)^{|p|}\times \right. \\ \times e^{-i(2\pi b^n(zp^2b^n - skp) - p\xi_n)} + \qquad (5) \\ \left. + \sum_{p=0}^{M} J_p(b^{(D-2)n}\zeta)e^{-i(2\pi b^n(zp^2b^n - skp) - p\xi_n)}\right).$$

Сравнение результатов расчетов по формулам (3) и (5) показало, что необходимая точность вычислений достигается, если параметр M, характеризующий диапазон суммирования, примерно равен 10. Отметим, что формулы (4) и (5) справедливы и для непериодических диффракталов.

В ходе численного моделирования рассчитывались на разных расстояниях z от начальной плоскости распределения интенсивности и фазы диффракталов, соответствующих задаваемым значениям стандартного отклонения фазы σ_0 и фрактальной размерности D. Затем для каждого значения z определялись усредненные по реализациям, отличающимся случайным набором значений ψ_n, стандартные отклонения фазы σ_φ и интенсивности σ_I. Одновременно производилась оценка фрактальных размерностей распределения фазы и распределения интенсивности. Эта оценка основывалась на анализе поведения построенного в логарифмических координатах графика зависимости дельта-дисперсии профилей фазы и интенсивности диффрактала от величины приращения поперечной координаты [12]. Фрактальная размерность D связана с тангенсом T угла наклона линейного участка графика соотношением $D = 2 - T/2$. Диапазон изменений приращения поперечной координаты, соответствующий линейному участку графика, определяет величину области скейлинга, в которой проявляется локальная масштабная инвариантность флуктуаций поля диффрактала. Оценка по этой методике области скейлинга начального распределения фазы Φ_k показывает, что ее величина ограничена снизу периодом самой высокочастотной гармоники, а сверху — величиной, равной примерно половине периода диффрактала a.

Результаты расчетов характеристик диффракталов, выполненных для слабых флуктуаций, иллюстрирует рис. 1. На рис. 1, *а* изображена полученная с помощью функции (1) одна из реализаций распределения фазы в начальной плоскости, соответствующая значениям $D = 1.25$, $\sigma_0 = 0.2$, $b = 3$, $s = 0.001$, $N_g = 5$. При таком задании параметров количество значащих точек, приходящихся на период высшей гармоники функции (1), равно 12, а на период низшей — 1000. На рис. 1, *б* приведены усредненные по

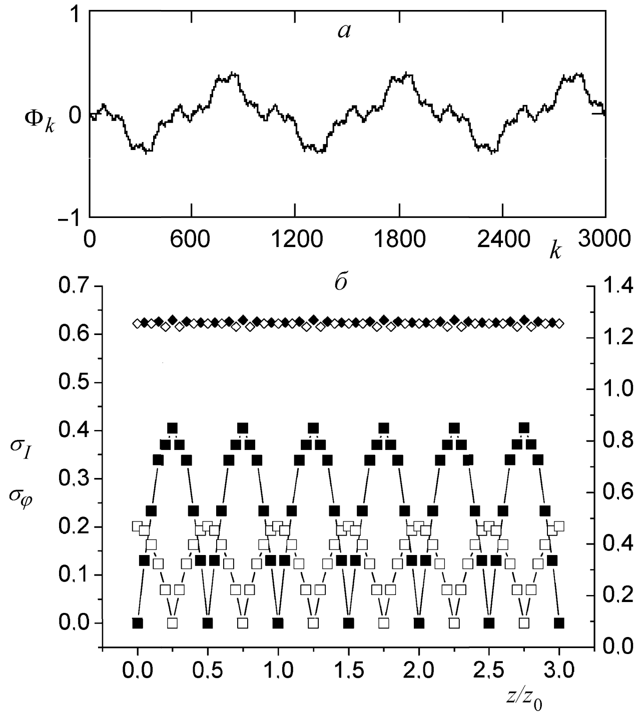

Рис. 1. Распределение фазы в начальной плоскости периодического диффрактала (*а*); зависимость стандартных отклонений σ_φ, σ_I и фрактальных размерностей D_φ, D_I от нормированной продольной координаты z/z_0 (*б*) (случай слабых флуктуаций). Незакрашенные квадраты — σ_φ, закрашенные квадраты — σ_I, незакрашенные ромбы — D_φ, закрашенные ромбы — D_I

реализациям данные о величине стандартных отклонений фазы σ_φ и интенсивности σ_I на различных расстояниях от начальной плоскости, а также данные о фрактальных свойствах распределений фазы и интенсивности. Расстояния измеряются в долях длины самовоспроизведения начальной структуры светового поля z_0. Из рис. 1, *б* видно, что величины σ_φ и σ_I, испытывая монотонные «противофазные» изменения, самовоспроизводятся с периодом $z_0/2$. В плоскостях $z = z_0/4 + z_0 j/2$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ σ_I вдвое превосходит величину σ_0. Существенным является тот факт, что формирующиеся при распространении диффрактала пространственные флуктуации интенсивности также приобретают фрактальные признаки, при этом фрактальная размерность распределения интенсивности D_I на разных расстояниях от начальной плоскости близка к фрактальной размерности распределения фазы D_φ, не претерпевающей заметных изменений по сравнению с начальным значением. Исключение составляют расстояния $z = z_0/4 + z_0 j/2$. На этих расстояниях при максимальных значениях σ_I волновой фронт становится плоским $(\sigma_\varphi = 0)$ и фрактальность в распределении фазы исчезает $(D_\varphi = 1)$. В свою очередь размерность D_I становится равной единице на расстояниях, кратных величине $z_0/2$, где распределение интенсивности становится однородным. Обращает на себя внимание малый разброс вычисляемых параметров диффракталов, соответствующих различным реализациям начального поля (определенные по 30 реализациям среднеквадратичные отклонения параметров, нормированные на средние значения, не превышали 0.02).

Параллельно с оценкой фрактальной размерности флуктуаций производилась оценка областей скейлинга. Она, в частности, показала, что при высокой стабильности фрактальной размерности развивающихся при распространении диффрактала флуктуаций интенсивности область наблюдающегося в них скейлинга претерпевает заметные изменения. Если вблизи начальной плоскости и плоскостей самовоспроизведения величина области скейлинга много меньше периода диффрактала a, то при удалении от них область скейлинга приближается к величине $a/2$. Такое увеличение области скейлинга физически объясняется тем, что вблизи указанных плоскостей основной вклад в изменения интенсивности вносят мелкомасштабные возмущения фазы, при удалении же от них возрастает роль крупномасштабных возмущений.

В ходе численного моделирования были рассмотрены также особенности преобразования поля диффрактала при сильных начальных флуктуациях фазы. На рис. 2 показано рассчитанное для этого случая с помощью формулы (3) поведение стандартного отклонения интенсивности σ_I и фрактальной размерности D_I. Полученные путем усреднения по реализациям графики соответствуют тем же пара-

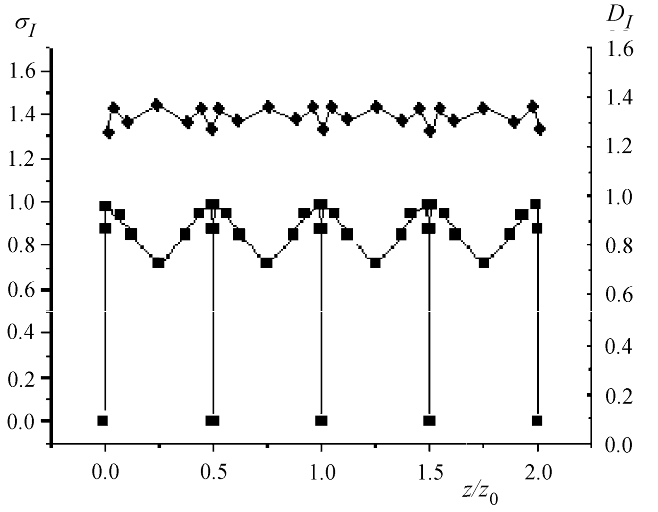

Рис. 2. Зависимость стандартного отклонения σ_I (*а*) и фрактальной размерности D_I от нормированной продольной координаты z/z_0 (*б*) (случай сильных флуктуаций). Закрашенные квадраты — σ_I, закрашенные ромбы — D_I

метрам начального распределения поля диффрактала, что и графики, представленные на рис. 1, *б*, но имеют более высокое значение σ_0 $(\sigma_0 = 3)$. Характеристики распределения фазы на рис. 2 не приводятся, поскольку при сильных флуктуациях это распределение сильно искажено возникающими в процессе распространения диффрактала краевыми дислокациями волнового фронта, вызывающими скачки фазы на величину π. Из рисунка видно, что в отличие от слабых флуктуаций σ_I достигает своего максимального значениях на расстояниях много меньших z_0. На расстояниях же $z = z_0/4 + z_0 j/2$ имеет место промежуточный минимум. По сравнению с σ_I фрактальная размерность D_I испытывает лишь небольшие изменения вблизи значения, равного D. Несмотря на устойчивый в целом характер поведения параметров σ_I и D_I при сильных флуктуациях, следует отметить, что их нормированные среднеквадратичные отклонения заметно увеличивались по сравнению со случаем слабых флуктуаций, достигая значения 0.05.

Для того чтобы установить, какие из приведенных выше характеристик свойственны именно периодическим диффракталам, было проведено численное моделирование свойств диффракталов, не обладающих свойством периодичности. Пример структуры первоначального распределения фазы такого диффрактала приведен на рис. 3, *а*. Это распределение отличается от приведенного на рис. 1, *а* только значением параметра b, которое в данном случае принималось равным $b = 2.9$. На рис. 3, *б* показано поведение характеристик непериодического диффрактала в зависимости от продольной координаты z (с учетом малого различия параметра b у сравниваемых диффракталов продольная координата нормирована на расстояние самовоспроизведения z_0 периодического диффрактала). Видно, что исчезает регулярное самовоспроизведение по оси z величин σ_φ и σ_I, хотя противофазный характер их изменения сохра-

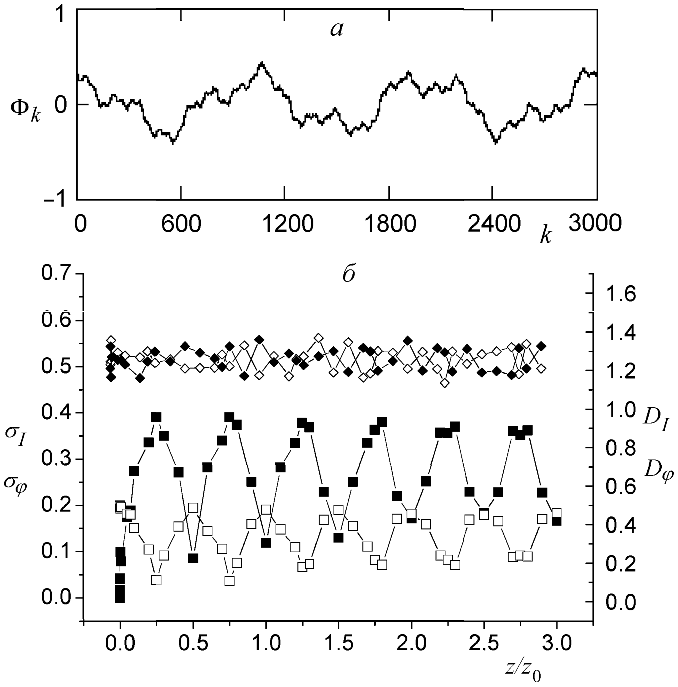

Рис. 3. Распределение фазы в начальной плоскости непериодического диффрактала (*а*); зависимость стандартных отклонений σ_φ, σ_I и фрактальных размерностей D_φ, D_I от нормированной продольной координаты z/z_0 (*б*) (случай слабых флуктуаций). Незакрашенные квадраты — σ_φ, закрашенные квадраты — σ_I, незакрашенные ромбы — D_φ, закрашенные ромбы — D_I

няется. В поле диффрактала отсутствуют плоскости, где σ_φ или σ_I обращаются в ноль. Что касается размерностей D_φ и D_I, то они и в этом случае оказываются близкими к величине D. Отметим, что средние значения σ_φ и σ_I при удалении от начальной плоскости, с хорошим приближением описываются стандартными отклонениям интенсивности $\tilde{\sigma}_I$ и фазы $\tilde{\sigma}_\varphi$ волны, дифрагировавшей на случайном экране. Последние, как известно [1], удовлетворяют соотношениям $\tilde{\sigma}_I = \sqrt{2}\sigma_0$ и $\tilde{\sigma}_\varphi = (\sqrt{2}/2)\sigma_0$.

Отмеченные выше в ходе анализа графиков на рис. 1–3 закономерности получили подтверждение при моделировании свойств диффракталов с иным набором параметров в начальной плоскости. Тем самым, обобщая все полученные результаты, можно сделать вывод, что статистические характеристики периодических диффракталов самовоспроизводятся по продольной координате z с периодом $z_0/2$, где z_0 — длина самовоспроизведения начального фазового профиля. В общем случае вдоль продольной координаты имеют место значительные «противофазные» изменения стандартных отклонений фазы и интенсивности. Значительно большей устойчивостью характеризуется поведение фрактальных размерностей распределений фазы и интенсивности. При этом существенным является то, что фрактальные размерности распределений фазы и интенсивности, за исключением плоскостей $z = z_0 j/4$, практически равны между собой и совпадают с фрактальной размерностью начального распределения фазы. Последнее свойство не является, однако, атрибутом диффракталов с периодической структурой. Аналогичным свойством обладают непериодические диффракталы, образовавшиеся, в частности, в результате дифракции плоской однородной волны на случайном фрактальном экране.

Литература

1. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2: Случайные поля. М., 1978.
2. *Гудмен Дж.* Введение в фурье-оптику. М., 1988.
3. *Berry M.V.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1979. **12**, N 6. P. 781.
4. *Talbot H.F.* // Phil. Mag. 1836. **9**. P. 401.
5. *Марченко В.Г.* // Квантовая электроника. 1981. **8**, №5. С. 1027.
6. *Лиханский В.В., Напартович А.П.* // УФН. 1990. **160**, №3. С. 101.
7. *Кандидов В.П., Левакова И.Г.* // Квантовая электроника. 1995. **22**, №1. С. 93.
8. *Коряковский А.С., Марченко В.М.* // ЖТФ. 1981. **51**, №7. С. 1432.
9. *Саляев Р.К., Дударева В.Л., Ланкевич С.В.* и др. // Медицинская физика. 2001. №11. С. 34.
10. *Jaggard D.L., Kim Y.* // J. Opt. Soc. Am. A. 1987. **4**, N 6. P. 1055.
11. *Westerholm J., Turunen J., Huttunen J.* // J. Opt. Soc. Am. A. 1994. **11**, N 4. P. 1283.
12. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. М., 2000.

Поступила в редакцию
20.07.03