

УДК 551.465.71+532.516

## СТАЦИОНАРНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ТЕЧЕНИЕ, ВЫЗЫВАЕМОЕ КОЛЕБАНИЯМИ УЧАСТКА ДНА

М. А. Носов, С. Н. Скачко

(кафедра физики моря и вод суши)

E-mail: nosov@phys.msu.ru

**Излагаются результаты лабораторного и математического моделирования нелинейных стационарных течений, возникающих в несжимаемой жидкости при колебаниях участка дна. Проводятся оценки скорости течения, образуемого в океане сейсмическими колебаниями дна.**

### Введение

Сильные подводные землетрясения в ряде случаев сопровождаются образованием аномалий температуры поверхности океана [1, 2], изменением концентрации фитопланктона [3], нарушением вертикальных распределений гидрофизических параметров [2, 4], генерацией внутренних волн большой амплитуды [5]. Все эти явления могут быть результатом резкого и кратковременного усиления вертикального обмена в океане над эпицентральной зоной подводного землетрясения.

Конкретный физический механизм усиления вертикального обмена при сейсмических колебаниях дна до сих пор остается малоисследованным. С нашей точки зрения, этот механизм связан либо с развитием турбулентности [6, 7], либо с формированием нелинейных течений [8, 9]. В настоящей статье, являющейся логическим развитием работ [8, 9], описываются результаты наших новых экспериментов, строится уточненная математическая модель наблюдаемых течений и оценивается их скорость в реальных условиях. В современной гидродинамике стационарным нелинейным течениям уделяется довольно много внимания [10]. Настоящая работа предлагает новый пример такого течения и подход к его математическому описанию.

### Экспериментальная установка

Экспериментальная установка представляла собой бассейн прямоугольной формы ( $0.22 \times 0.22 \times 0.22$  м) с прозрачными боковыми стенками. Дно бассейна состояло из двух слоев — жесткого (нижнего) и эластичного (верхнего). В центре жесткой части дна имелось круглое отверстие диаметром 0.07 м, в котором располагался поршень диаметром 0.015 м, колеблющийся в вертикальном направлении. Эластичное покрытие дна (резина) жестко связывалось с поршнем, в результате чего центральная область дна бассейна совершала гармонические колебания. Пространственное распределение амплитуды колебаний приблизительно (визуальная оценка) соответствовало функции  $\eta_0 \exp(-r^2/a^2)$  при  $a \approx 0.02$  м, где  $r$  — расстояние от центра бассейна. Амплитуда  $\eta_0$  определялась выбором эксцентрика и

могла принимать дискретные значения из диапазона 0.0013–0.0045 м. Частота колебаний, варьируемая в диапазоне 5–25 Гц, измерялась частотомером ЧЗ-64 при помощи обтюлятора, установленного на оси эксцентрика. Бассейн заполнялся однородной жидкостью (вода или глицерин) до глубины 0.1 м. Эксперименты проводились при фиксированных значениях амплитуды и частоты колебаний.

Для визуализации динамических процессов в жидкости применялась техника «светового ножа», плоскость которого была перпендикулярна поверхности дна и проходила через центр бассейна. В качестве трассеров использовались частицы мела (в воде) и частицы алюминиевой пудры (в глицерине). Скорость исследуемых течений существенно превосходила скорость осаждения трассеров. Фотосъемка динамических процессов в жидкости проводилась через прозрачную боковую стенку бассейна с направления, нормального плоскости «светового ножа».

### Результаты экспериментов

Установившиеся гармонические колебания участка дна бассейна приводили к образованию торoidalных вихрей — стационарных течений, скорость которых не превышала 0.01 м/с. Скорость колебательных движений жидкости, оцениваемая как  $\eta_0 \omega$  (для условий наших экспериментов 0.04–0.7 м/с), всегда существенно превышала скорость стационарного течения. Наблюдаемые течения существенно увеличивали вертикальный обмен в жидком слое. На рис. 1 представлены фотографии и схемы течений в воде и глицерине. Фотографии получены при существенно различных временах экспозиции (0.04 с и 120 с соответственно). Рис. 1, а демонстрирует начальную стадию развития течения в воде, а рис. 1, б — установившееся течение в глицерине. Указанные особенности представления данных объясняются различием методов визуализации течений в воде и глицерине. Частицы мела, использовавшиеся в воде в качестве трассеров, слишком мелки и не могут быть зафиксированы на фотографии как отдельные объекты, но только как «облако». В установившемся режиме «облако», зафиксированное на фотографии, не дает наглядного представления о течении.

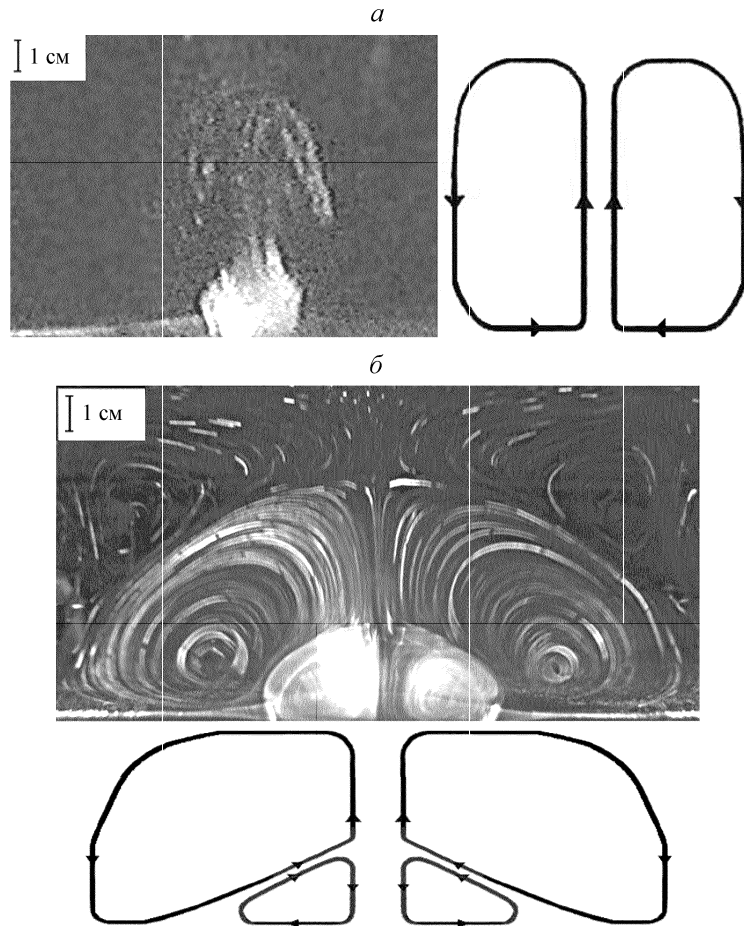


Рис. 1. Характерный вид нелинейного стационарного течения, образуемого колебаниями участка дна в воде (а) и глицерине (б). Фотографии сделаны при амплитуде колебаний дна 0.0045 м и частоте 20 Гц; время экспозиции 0.04 с (а) и 120 с (б)

В глицерине использовались более крупные частицы алюминиевой пудры, которые легко различимы на фотографии.

В воде формировалась одна тороидальная ячейка, в глицерине — две ячейки. Устойчиво воспроизводимой особенностью наблюдаемых течений в исследованном диапазоне амплитуд и частот колебаний является направление вектора скорости в непосредственной близости дна. В воде скорость направлена от периферии к центру, в то время как в глицерине наоборот — от центра к периферии.

### Базовая математическая модель

Модель нелинейного течения, строится на основе системы уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в предположении сосуществования двух течений — медленного (стационарного) и быстрого (вынужденные колебания — отклик на колебания дна). Поля скорости течения  $\mathbf{v}$  и давления  $p$  представляются в виде соответствующих сумм:

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{v}', \quad p = \langle p \rangle + p'. \quad (1)$$

Подстановка формул (1) в систему Навье–Стокса и осреднение ее по периоду колебаний дает систему уравнений, описывающую стационарное те-

чение (квадратичным по средней скорости членом  $(\langle \mathbf{v} \rangle, \nabla) \langle \mathbf{v} \rangle$  мы пренебрегаем):

$$-\frac{\nabla \langle p \rangle}{\langle \rho \rangle} + g + \nu \Delta \langle \mathbf{v} \rangle - \langle (\mathbf{v}', \nabla) \mathbf{v}' \rangle = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{v} \rangle = 0. \quad (3)$$

Система (2), (3) отличается от обычных линейризованных стационарных уравнений Навье–Стокса наличием нового члена  $\mathbf{f} = -\langle (\mathbf{v}', \nabla) \mathbf{v}' \rangle$ , который можно интерпретировать как внешнее силовое поле — источник нелинейного стационарного течения.

### Вспомогательная линейная задача

Для вычисления силового поля  $\mathbf{f}$  требуется знание поля скорости  $\mathbf{v}'$  в вынужденных колебаниях, которое ищется в два этапа. На первом этапе поле  $\mathbf{v}'$  определяется из решения осесимметричной задачи о линейном отклике безграничного по горизонтали слоя однородной невязкой жидкости толщины  $H$  на колебания участка дна малой амплитуды ( $\eta \ll H$ ). Начало цилиндрической системы координат поместим на невозмущенной поверхности дна, ось  $Oz$  направим вертикально вверх. Задача решается от-

носителем потенциала скорости течения  $F(r, z, t)$  в следующей постановке:

$$r^{-1}(rF_r)_r + F_{zz} = 0, \quad (4)$$

$$F_{tt} = -gF_z, \quad z = H, \quad (5)$$

$$F_z = \eta_t, \quad z = 0, \quad (6)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\eta(r, t) = \eta_0 \times \exp(-r^2/a^2)\theta(t) \sin(\omega t)$  — закон движения дна,  $\eta_0$  и  $\omega$  — амплитуда и циклическая частота колебаний дна,  $a$  — горизонтальный размер колеблющегося участка дна,  $\theta$  — функция Хевисайда. Поле скорости выражается через потенциал традиционным образом:  $\mathbf{v}' = \nabla F$ . Задача (4)–(6) решается аналитически [8]. Ранее нами было показано, что при условии  $\omega > \sqrt{g/H}$  переходным процессом при «включении» колебаний дна можно пренебречь, а решение задачи представляется в виде

$$\{u', w'\} = \{u'_0, w'_0\} \cos(\omega t),$$

где  $u'_0$  и  $w'_0$  — радиальная и вертикальная компоненты амплитуды скорости в вынужденных колебаниях.

На втором этапе проводится корректировка тангенциальной к поверхности дна компоненты скорости течения, с тем чтобы она удовлетворяла условию прилипания [9]. Скорректированные формулы для радиальной и вертикальной компонент силового поля имеют следующий вид:

$$R^{\text{corr}} = -\frac{1}{2}u'_0 \frac{\partial u'_0}{\partial r} \left\{ 1 + e^{-2z/\delta} - 2e^{-z/\delta} \cos(z/\delta) \right\} - \frac{1}{2}w'_0 \left[ \frac{\partial u'_0}{\partial z} \left\{ 1 - e^{-z/\delta} \cos(z/\delta) \right\} + \frac{u'_0}{\delta} e^{-z/\delta} \left\{ \cos(z/\delta) + \sin(z/\delta) \right\} \right], \quad (7)$$

$$Z^{\text{corr}} = -\frac{1}{2}u'_0 \frac{\partial w'_0}{\partial r} \left\{ 1 - e^{-z/\delta} \cos(z/\delta) \right\} - \frac{1}{2}w'_0 \frac{\partial w'_0}{\partial z}, \quad (8)$$

где  $\delta = (2\nu)^{1/2} \omega^{-1/2}$  — толщина вязкого слоя.

### Расчет поля скорости нелинейного течения

Уравнения (2), (3) стандартным образом сводятся к неоднородному бигармоническому уравнению относительно функции тока  $\Psi(r, z)$ :

$$\Delta^2 \Psi = (R_z^{\text{corr}} - Z_r^{\text{corr}}) / \nu. \quad (9)$$

Радиальная и вертикальная компоненты скорости течения выражаются через функцию тока следующим образом [11]:  $\langle u \rangle = -\Psi_z/r$  и  $\langle w \rangle = \Psi_r/r$ .

Уравнение (9) решается численно в области  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq z \leq H$ . Величина  $R$  выбиралась достаточно большой, чтобы исключить влияние боковых стенок на исследуемые течения.

Уравнение (9) дополнялось граничными условиями, которые имеют следующий физический смысл: на дне и вертикальной твердой стенке — условие прилипания, на свободной поверхности — нулевая

вертикальная скорость и отсутствие напряжений, на оси  $Oz$  — условие симметрии. Математическая формулировка означенных граничных условий следующая:

$$\Psi = 0, \quad \Psi_z = 0, \quad z = 0; \quad (10)$$

$$\Psi = 0, \quad \Psi_r = 0, \quad r = R; \quad (11)$$

$$\Psi = 0, \quad \Psi_{zz} = 0, \quad z = H; \quad (12)$$

$$\Psi = 0, \quad \Psi_r = 0, \quad r = 0. \quad (13)$$

Задача (9)–(13) решалась в конечных разностях при помощи неявного метода Якоби [12, 13]. Расчеты проводились на равномерной прямоугольной сетке ( $100 \times 100$  узлов). Горизонтальный размер расчетной области выбирался достаточно большим, чтобы боковые стенки не оказывали влияния на исследуемое течение.

### Результаты и их обсуждение

На рис. 2, а представлен характерный вид функции тока, рассчитанной численно при значении вязкости  $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с (вода). Как видно из рисунка, в этом случае существует единственная тороидальная ячейка, в которой жидкость движется таким образом, что вблизи дна вектор скорости направлен от периферии к центру (положительные значения функции тока). Пример расчета линий тока при вязкости  $\nu = 6.8 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с (глицерин) представлен на рис. 2, б. В этом случае существуют две ярко выраженные тороидальные ячейки, причем нижняя соответствует отрицательным значениям функции тока, а верхняя — положительным, т. е. вблизи дна жидкость движется от центра к периферии. Важно подчеркнуть, что силовое поле, формирующее течение, при любой вязкости направлено вблизи дна в противоположном направлении — от периферии к центру. В этом заключается нетривиальность полученного результата. Отметим, что предложенная математическая модель правильно воспроизводит основные особенности наблюдаемых течений.

Расчеты, выполненные для широкого диапазона значений кинематической вязкости ( $10^{-6}$  –  $10^{-3}$  м<sup>2</sup>/с), позволили установить, что переключение направления скорости течения у дна происходит при  $\nu \approx 1.3 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с. Вблизи точки бифуркации скорость стационарного течения стремится к нулю.

Оценим характерную скорость стационарного течения. Учитывая, что линейные размеры системы существенно превосходят толщину вязкого слоя  $\delta \ll \{H, a\}$ , из формул (7) и (8) получаем

$$R^{\text{corr}} \approx -\frac{w'_0 u'_0}{2\delta} e^{-z/\delta} \left\{ \cos(z/\delta) + \sin(z/\delta) \right\}, \quad (14)$$

$$|R^{\text{corr}}| \gg |Z^{\text{corr}}|.$$

Для расчета профиля скорости течения, образуемого в придонном слое  $0 < z < D$  ( $\delta \ll D \ll H$ ) силовым полем (14), будем полагать, что величины  $u'_0$  и  $w'_0$  не зависят от вертикальной координаты  $z$ , а действием градиента давления можно пренебречь. Интегрируя

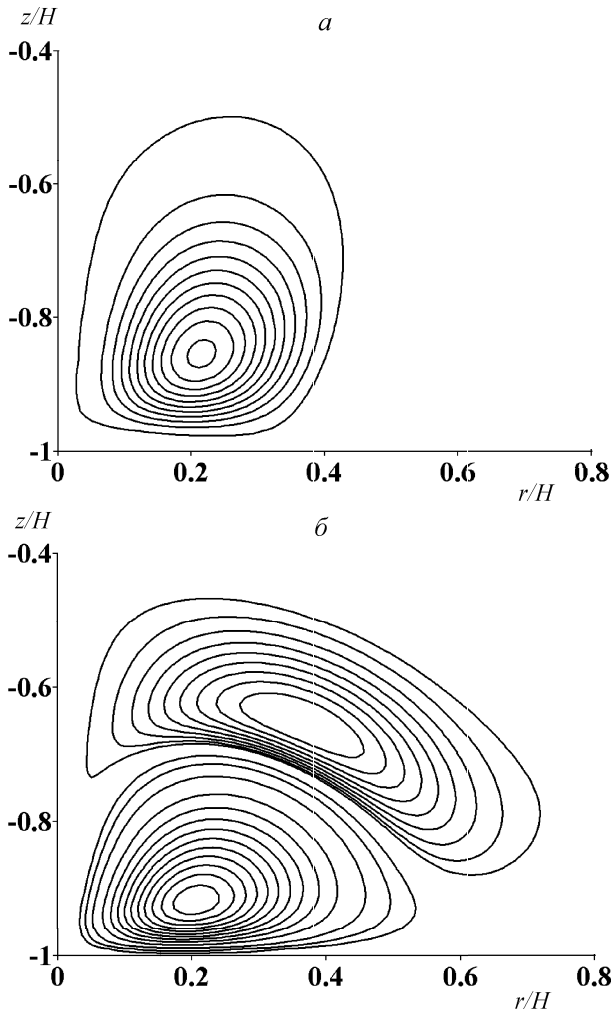


Рис. 2. Функция тока нелинейного стационарного течения, образуемого колебаниями участка дна в воде (а) и в глицерине (б). Расчет выполнен при  $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с (вода),  $\nu = 6.8 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с (глицерин),  $H = 0.1$  м,  $a = 0.02$  м; значения амплитуды и частоты колебаний дна соответствуют рис. 1

уравнение (2) с граничными условиями  $\langle u \rangle|_{z=0} = 0$  и  $\partial \langle u \rangle / \partial z|_{z=D} = 0$ , получаем искомый профиль:

$$\langle u(z) \rangle = -\frac{u'_0 w'_0 \delta}{4\nu} \left( 1 - 2e^{-H/\delta} \frac{z}{\delta} \cos [H/\delta] + e^{-z/\delta} (\sin [z/\delta] - \cos [z/\delta]) \right). \quad (15)$$

Прямой расчет величины  $u'_0 w'_0$  с использованием аналитического решения задачи (4)–(6) дает следующую оценку (при  $r = a$ ,  $z = 0$ ):

$$u'_0 w'_0 \approx 0.16 (\eta_0 \omega)^2 \begin{cases} 1, & a < H; \\ H/a, & a > H. \end{cases} \quad (16)$$

Из уравнения неразрывности вытекает связь между характерными значениями горизонтальной  $U_0$  и вертикальной  $W_0$  компонент скорости стационарного нелинейного течения:

$$\frac{U_0}{a} \sim \frac{W_0}{H} W_0 \sim U_0 \begin{cases} 1, & a < H; \\ H/a, & a > H. \end{cases} \quad (17)$$

В итоге из формул (15)–(17) имеем следующие оценки компонент скорости:

$$U_0 = \frac{u'_0 w'_0 \delta}{4\nu} \sim \frac{(\eta_0 \omega)^2 \delta}{25\nu} \begin{cases} 1, & a < H; \\ H/a, & a > H, \end{cases} \quad (18)$$

$$W_0 \sim \frac{(\eta_0 \omega)^2 \delta}{25\nu} \begin{cases} 1, & a < H; \\ H^2/a^2, & a > H. \end{cases} \quad (19)$$

Для условий наших экспериментов ( $H = 0.1$  м,  $a = 0.02$  м,  $\eta_0 = 0.001$  м,  $f = 10$  Гц), согласно оценкам (18) и (19), получаем, что в воде ( $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с),  $U_0 \sim W_0 \sim 0.03$  м/с, а в глицерине  $U_0 \sim W_0 \sim 0.001$  м/с. Полученные оценки по порядку величины неплохо согласуются со значениями, наблюдаемыми в экспериментах.

Для реальных природных условий ( $H = 1000$  м,  $a = 10000$  м,  $\eta_0 = 0.1$  м,  $f = 1$  Гц,  $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с) получаем:  $U_0 \sim 1$  м/с,  $W_0 \sim 0.1$  м/с. Поле скорости, характеризуемое такими значениями, способно заметно повлиять на стратификационную структуру океана.

Авторы выражают искреннюю признательность Ю. И. Троицкой за ценные замечания и обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 01-05-64547, 03-05-06247, 04-05-64297).

#### Литература

1. Левин Б.В., Носов М.А., Павлов В.П., Рыкунов Л.Н. // Докл. РАН. 1998. **358**, № 3. С. 399.
2. Лучин В.А., Левин Б.В., Носов М.А. и др. // Юбилейный вып. ДВНИГМИ. Владивосток, 2000. С. 172.
3. Levin B.W., Nosov M.A., Skachko S.N. // Proc. of Joint IOC-IUGG International Workshop Tsunami Risk Assessment Beyond 2000: Theory, Practice and Plans. Moscow. June 14–16, 2001. P. 105.
4. Дегтерев А.Х. // Метеорология и гидрология. 2001. № 12. С. 59.
5. Filonov A.E. // EOS. 1997. **78**, N 3. P. 21.
6. Носов М.А., Иванов П.С. // Вулканология и сейсмология. 1997. № 1. С. 102.
7. Носов М.А., Скачко С.Н. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 5. С. 51 (Moscow University Phys. Bull. 1999. N 5. P. 66).
8. Носов М.А., Скачко С.Н. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 4. С. 66 (Moscow University Phys. Bull. 2000. N 4. P. 81).
9. Nosov M.A., Skachko S.N. // Proc. of International Workshop «Local tsunami warning and mitigation». Petropavlovsk-Kamchatsky, Sept. 10–15, 2002 / Eds. B.W. Levin, M.A. Nosov. Moscow: Janus-K, 2002. P. 115.
10. Riley N. // Ann. Rev. Fluid Mech. 2001. **33**. P. 43.
11. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., 1970.
12. Самарский А.А., Гулин А.Н. Численные методы. М., 2001.
13. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 2-е изд. М.; СПб., 2001.

Поступила в редакцию  
10.12.03