УДК 530.12: 531.51

ГЛОБАЛЬНЫЙ МОНОПОЛЬ ВО ВСЕЛЕННОЙ РЭНДАЛЛ–СУНДРУМА

Ю. В. Грац, А. А. Россихин

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: grats@string.phys.msu.su

Исследуется гравитационное поле глобального монополя в модели Рэндалл–Сундрума с одним бесконечным дополнительным измерением. Показано, что в отличие от гравитационного поля своего четырехмерного аналога, ньютоновский потенциал, помещенный на брану монополя, отличен от нуля и ведет себя как r^{-1} на малых и как $\ln(2kr)/r^2$ на больших расстояниях.

Введение

Сейчас широко распространено мнение, что теория гравитации Эйнштейна является низкоэнергетическим приближением некоторой фундаментальной теории, которая формулируется в пространстве-времени с числом измерений больше четырех.

До недавнего времени в качестве таких теорий рассматривались теории типа Калуцы–Клейна с планковским размером дополнительного пространства, что эффективно обеспечивало редукцию теории к четырем измерениям. Однако в последнее время все более популярными становятся модели мира на бране [1], т. е. на гиперповерхности с тремя пространственными и одним временным измерениями, вложенной в некоторое многомерное пространство. Такими моделями, в частности, являются модели Рэндалл–Сундрума с двумя (RS1) и одной (RS2) бранами и одним дополнительным пространственным измерением, которое может быть большим, порядка ТэВ$^{-1}$ [2], или даже бесконечным [3]. В теориях этого типа предполагается, что обычное вещество локализовано на бране, в то время как гравитационное поле эволюционирует во всем многомерном фундаментальном пространстве.

В отличие от теорий типа Калуцы–Клейна, где факт существования дополнительного пространства принципиально не может быть обнаружен, большой размер дополнительных измерений ставит вопрос об их возможных наблюдательных проявлениях. В частности, было показано, что гравитационное поле прямолинейной космической струны в модели Рэндалл–Сундрума с одной браной заметно отличается от полученного в рамках стандартной четырехмерной теории [4] и что это приводит к существенному изменению спектра вакуумных флуктуаций квантованного поля вблизи струны [5].

Ниже мы исследуем гравитационное поле глобального монополя, вложенного в мир Рэндалл–Сундрума второго типа (RS2). Наш выбор объекта исследования связан с тем, что вместе с космическими струнами глобальные монополи являются двумя типами топологических дефектов, представляющих наибольший интерес с точки зрения космологии.

1. Глобальный монополь в стандартной космологии

Глобальные монополи возникают при спонтанных нарушениях глобальной $SO(3)$ симметрии. Простейшей моделью, приводящей к решениям этого типа, является триплет скалярных полей, описываемый лагранжианом вида [6]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^i - \frac{\lambda}{4}(\phi^i\phi^i - \eta^2)^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Соответствующее этой модели монопольное решение обращается в ноль в центре дефекта, а на больших расстояниях от ядра ведет себя как

$$\phi^i(x) = \eta \frac{x^i}{r},$$

где η — энергетический масштаб фазового перехода, при котором образуется дефект; r — расстояние от центра монополя. При этом в сферических координатах не равные нулю компоненты тензора энергии-импульса монополя имеют вид

$$T_t^t = T_r^r = -\frac{\eta^2}{r^2}. \tag{1}$$

Сферически-симметричное распределение материи (1) генерирует гравитационное поле, которое описывается метрикой [6]

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \alpha^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega_2, \quad \alpha^2 = 1 - 8\pi G_4 \eta^2, \tag{2}$$

где G_4 — гравитационная постоянная.

Пространство-время (2) называется пространством-временем точечного глобального монополя. После замены $t \to \alpha t$, $r \to \alpha^{-1} r$ метрика (2) приводится к виду

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\Omega_2, \tag{3}$$

из которого следует, что единственным параметром, который характеризует рассматриваемое пространство-время, является дефицит телесного угла $\Delta\Omega_2 = 4\pi(1 - \alpha^2)$. И хотя ньютоновский потенциал глобального монополя равен нулю, пространство-время (3) не является локально плоским, и монополь оказывает приливное воздействие на окружающую материю.

2. Линеаризованная гравитация в RS2 модели

Следуя работе [7], приведем необходимые для дальнейшего результаты, касающиеся линеаризованной гравитации в RS2 модели с материей на бране.

Представим метрику пространства-времени в виде

$$ds^2 = \hat{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + 2N_\mu dx^\mu dy + (1+\phi)dy^2,$$

где

$$\hat{g}_{\mu\nu} = e^{-2k|y|}\left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right),$$

x^μ — координаты на бране ($\mu, \nu, \ldots = 0,1,2,3$), координата y соответствует дополнительному измерению, $\hat{g}_{\mu\nu}(x,y)$ — метрика на времениподобной гиперповерхности $y = \mathrm{const}$, а k — характерный параметр модели, который связан с пятимерной космологической постоянной $\Lambda_5 = 6k$ и натяжением браны $\sigma = -12k$ и определяет масштаб длины, на котором проявляются поправки от дополнительного измерения к четырехмерной эйнштейновской теории. Подобное расщепление пространства RS2 модели на однопараметрическое семейство гиперповерхностей аналогично расщеплению пространства-времени на пространство и время, применяемому в общей теории относительности [8].

В линейном приближении $h_{\mu\nu}$, N_μ и ϕ рассматриваются как малые величины одного порядка. Как показано в [7], при наложении глобальных калибровочных условий

$$N_\mu = -\frac{\operatorname{sgn} y}{8k}h_{,\mu}, \quad \phi = -\frac{\operatorname{sgn} y}{4k}h_{,y}, \quad \tilde{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu} = 0, \quad (4)$$

где $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$, а $\tilde{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}h$ — бесследовая часть $h_{\mu\nu}$, брана остается зафиксированной в положении $y=0$ при произвольном распределении материи на ее поверхности.

В том же приближении в качестве тензора энергии-импульса, который подставляется в правую часть пятимерных уравнений Эйнштейна, следует взять

$$T^{\mu\nu} = -\frac{3k}{4\pi}\sqrt{1-\phi}\,\hat{g}_{\mu\nu}\delta(y) + t^{\mu\nu}\delta(y), \quad T^{y\mu} = T^{yy} = 0.$$

В этом выражении первый член соответствует бране, в то время как второй — возмущениям от помещенной на брану материи.

При наложении калибровочных условий (4) уравнения для $\tilde{h}_{\mu\nu}$ и следа h приобретают вид

$$\partial_y\left(e^{-2k|y|}\partial_y\tilde{h}_{\mu\nu}\right) - 2k\operatorname{sgn} y e^{-2k|y|}\partial_y\tilde{h}_{\mu\nu} + \Box\tilde{h}_{\mu\nu} = = -16\pi G_5\delta(y)\left[t_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\nu\partial_\mu}{\Box}\right)t\right], \quad (5)$$

$$\Box h\Big|_{y=0} = \frac{32\pi G_5 k}{3}t, \quad (6)$$

где $\Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu$, G_5 — пятимерная гравитационная постоянная, а $t \equiv \eta^{\mu\nu}t_{\mu\nu}$.

Решение уравнения (5) удобно искать в импульсном представлении. Можно показать, что при $q^2 > 0$ (нас будет интересовать статическое распределение материи)

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(q,y) = \frac{8\pi G_5}{q}\left[t_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)t\right] \times \times e^{2k|y|}\frac{\mathrm{K}_2\left(e^{k|y|}q/k\right)}{\mathrm{K}_1(q/k)}, \quad (7)$$

K_ν — функция Макдональда. При этом для следа возмущения h в соответствии с (6) получаем

$$h(q,y)\Big|_{y=0} = -32\pi G_5\frac{k}{3}\frac{t(q)}{q^2}. \quad (8)$$

На поверхности браны при $y=0$ решение (7) может быть разбито на два слагаемых: $\tilde{h}_{\mu\nu}(x,0) = \tilde{h}^0_{\mu\nu}(x) + \tilde{h}^1_{\mu\nu}(x)$, где

$$\tilde{h}^0_{\mu\nu}(x) = 16\pi G_5 k\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{iqx}\frac{W_{\mu\nu}(q)}{q^2}, \quad (9)$$

$$\tilde{h}^1_{\mu\nu}(x) = 8\pi G_5\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{iqx}\frac{\mathrm{K}_2(q/k)}{q\mathrm{K}_1(q/k)}W_{\mu\nu}(q), \quad (10)$$

а тензор

$$W_{\mu\nu}(q) = t_{\mu\nu}(q) - \frac{1}{3}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)t(q).$$

Чтобы прояснить смысл такого разбиения, заметим, что в рассматриваемом приближении тензор Эйнштейна на бране может быть представлен в виде

$$\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\hat{R} = -\frac{1}{2}\Box\tilde{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\left(h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\Box h\right). \quad (11)$$

Подставив в (11) формулы для $\tilde{h}^0_{\mu\nu}$ (9) и следа h (8), можно убедиться, что в пределе $k \to \infty$ данные величины удовлетворяют четырехмерным линеаризованным уравнениям Эйнштейна с $t_{\mu\nu}$ в правой части и гравитационной постоянной $G_4 = G_5 k$. При этом $\tilde{h}^1_{\mu\nu}$ (10) стремится к нулю. Таким образом, эта часть возмущения гравитационного поля определяет отличие индуцированной метрики от метрики, которая создавалась бы тем же распределением материи в четырехмерной теории.

3. Глобальный монополь в мире Рэндалл–Сундрума

Поскольку составляющие монополь поля Стандартной модели локализованы на бране, при нахождении его метрики в линейном приближении в качестве тензора энергии-импульса следует взять выражение, которое этот тензор имеет в пространстве Минковского (1) или в декартовых координатах:

$$t_{00} = \frac{\eta^2}{R^2}, \quad t_{ik} = -\eta^2 \frac{x_i x_k}{R^4}, \quad R^2 = x^i x^i, \quad i, k = 1, 2, 3.$$

В результате можно показать, что гравитационное поле монополя на бране определяется выражениями (9), (10) и (8), в которых тензор $W_{\mu\nu}(q)$ и след $t(q)$ имеют вид

$$W_{\mu\nu}(q) = \frac{2\eta^2\pi^3}{3q}\delta(q_0)\left[3\sum_{i=1}^{3}\delta_{i\mu}\delta_{i\nu} - 2\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right],$$

$$t(q) = -8\frac{\eta^2\pi^3}{q}\delta(q_0).$$

Отсюда при $y = 0$ для $\tilde{h}_{00}$ и $\tilde{h}_{ij}$ (остальные компоненты равны нулю) и следа h получаем

$$\tilde{h}_{00}(\mathbf{x}) = \frac{16G_4\eta^2\pi^3}{3k}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{qx}}}{q^2}\frac{\mathrm{K}_2(q/k)}{\mathrm{K}_1(q/k)},$$

$$\tilde{h}_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{8G_4\eta^2\pi^3}{3k}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{qx}}}{q^2}\left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2}\right)\frac{\mathrm{K}_2(q/k)}{\mathrm{K}_1(q/k)},$$

$$h(\mathbf{x}) = \frac{8G_4\eta^2\pi^3}{3k}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{qx}}}{q^3}.$$

Перейдем к сферическим координатам. В этом случае возмущения метрики могут быть представлены в виде

$$h_{00}(R) = \frac{16G_4\eta^2\pi^3}{3k}(I_1 - 2kI_0),$$

$$h_{RR}(R) = \frac{8G_4\eta^2\pi^3}{3k}\left(I_1 + 4kI_0 + \partial_R\partial_R I_2\right),$$

$$h_{\theta\theta}(R) = \frac{8G_4\eta^2\pi^3}{3k}R^2\left(I_1 + 4kI_0 + \frac{1}{R}\partial_R I_2\right),$$

$$h_{\phi\phi}(R,\theta) = \frac{8G_4\eta^2\pi^3}{3k}R^2\sin^2\theta\left(I_1 + 4kI_0 + \frac{1}{R}\partial_R I_2\right),$$

где введены обозначения

$$I_0(R) = \frac{2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{dq}{q}\frac{\sin(qR)}{qR},$$

$$I_1(R) = \frac{2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dq\frac{\sin(qR)}{qR}\frac{\mathrm{K}_2(q/k)}{\mathrm{K}_1(q/k)},$$

$$I_2(R) = \frac{2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{dq}{q^2}\frac{\sin(qR)}{qR}\frac{\mathrm{K}_2(q/k)}{\mathrm{K}_1(q/k)}.$$

Введем новую радиальную переменную r, которая, как это будет видно из полученного результата, соответствует истинному расстоянию от ядра монополя:

$$\left[1 + \frac{8G_4\eta^2\pi^3}{3k}\left(I_1 + 4kI_0 + \frac{\partial_R I_2}{R}\right)\right]R^2 = \\ = [1 - 8\pi G_4\eta^2(1 + f_1(kr))]r^2.$$

В терминах новой радиальной координаты метрику монополя на бране можно привести к виду

$$d\hat{s}^2 = -dt^2[1 - 8\pi G_4\eta^2 f_2(kr)] + dr^2 + \\ + [1 - 8\pi G_4\eta^2(1 + f_1(kr))]r^2 d\Omega_2, \tag{12}$$

где функции f_1 и f_2 определяются соотношениями

$$\partial_x[xf_1(x)] = \frac{1}{6}\int_0^\infty dq\frac{(\sin(qx) - qx\cos(qx))}{qx}\frac{\mathrm{K}_0(q)}{\mathrm{K}_1(q)}, \tag{13}$$

с граничным условием $xf_1(x)|_{x\to\infty} = 0$ и

$$f_2(x) = \frac{1}{3}\int_0^\infty dq\frac{\sin(qx)}{qx}\frac{\mathrm{K}_0(q)}{\mathrm{K}_1(q)}. \tag{14}$$

Нетрудно проверить, что при $k \to \infty$ обе функции обращаются в нуль и метрика приобретает вид, соответствующий случаю стандартной четырехмерной теории (3).

Из выражений (12), (13) и (14) видно, что наличие пятого измерения индуцирует изменение локальной геометрии пространства-времени монополя. Можно показать, что на больших по сравнению с $1/k$ расстояниях от ядра монополя

$$d\hat{s}^2 = -dt^2\left[1 - \frac{8\pi G_4\eta^2}{3k^2r^2}\ln(2kr)\right] + dr^2 + \\ + \left[1 - 8\pi G_4\eta^2\left(1 - \tfrac{1}{6k^2r^2}(2\ln(2kr) + 1)\right)\right]r^2 d\Omega_2,$$

в то время как при $r \ll 1/k$ получаем

$$d\hat{s}^2 = -dt^2\left[1 - \frac{4\pi^2 G_4\eta^2}{3kr}\right] + dr^2 + \\ + \left[1 - 8\pi G_4\eta^2\left(1 + \frac{\pi\ln(kr)}{12kr}\right)\right]r^2 d\Omega_2.$$

Таким образом, в отличие от случая четырех измерений гравитационный потенциал монополя на бране не равен нулю и на больших расстояниях ведет себя как $\ln(2kr)/r^2$, в то время как на малых он пропорционален $1/r$. Если $k^{-1} \sim 1$ мм и если, как это предполагается, монополи образовались при энергиях $\sim 10^{16}$ ГэВ, то на расстояниях $r \sim 1$ парсек гравитационное ускорение будет порядка 10^{-42} см с$^{-2}$. Поэтому с космологической точки зрения этот эффект вряд ли представляет интерес. С другой стороны, изменение гравитационного монополя может заметно отразиться на процессах, происходящих вблизи ядра, таких, как эффект поляризации вакуума.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 04-02-16476).

Литература

1. *Рубаков В.А.* // УФН. 2001. **171**, № 9. С. 913.
2. *Randall L., Sundrum R.* // Phys. Rev. Lett. 1999. **83**, N 17. P. 3370.
3. *Randall L., Sundrum R.* // Phys. Rev. Lett. 1999. **83**, N 23. P. 4690.
4. *Davis S.C.* // Phys. Lett. B. 2001. **499**, N 1–2. P. 179.
5. *Grats Yu.V., Rossikhin A.A.* // Mod. Phys. Lett. A . 2002. **17**, N 18. P. 1207.
6. *Barriola M., Vilenkin A.* // Phys. Rev. Lett. 1989. **63**, N 4. P. 341.
7. *Aref'eva I.Y., Ivanov M.G., Mück W.* et al. // Nucl. Phys. B. 2000. **590**, N 1–2. P. 273.
8. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Д.* Гравитация. М., 1977.

Поступила в редакцию
19.01.04