УДК 517.958.226

О ФОРМИРОВАНИИ И РАСПРОСТРАНЕНИИ РЕЗКИХ ПЕРЕХОДНЫХ СЛОЕВ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефёдов, К. Р. Шнайдер*)

(*кафедра математики*)

Исследован вопрос о том, как в сингулярно возмущенном параболическом уравнении из начальной функции общего вида формируется решение с резким переходным слоем. Описаны возможные сценарии поведения переходного слоя с течением времени.

Введение

Рассмотрим нелинейное параболическое уравнение типа реакция–диффузия

$$\varepsilon^2(u_{xx} - u_t) = f(u, x, t). \qquad (1)$$

Такие уравнения служат математическими моделями многих физических, химических и биологических процессов. Во многих задачах множитель ε^2 оказывается малой величиной. В таком случае уравнение (1) называется уравнением с малым параметром при старших производных, или сингулярно возмущенным уравнением. Физическая природа малого параметра в разных задачах различна. Множитель ε^2 может быть малым коэффициентом диффузии или температуропроводности в задачах массо- или теплопереноса; величиной, обратной константе скорости быстрой реакции, в задачах химической кинетики и т. д.

Одним из наиболее интересных явлений, описываемых уравнением (1) при малых ε, являются контрастные диссипативные структуры, характеризующиеся узкими внутренними переходными слоями, в которых происходит резкое (скачкообразное) изменение решения $u(x,t,\varepsilon)$ уравнения (1). Теория диссипативных структур (этот термин был предложен лауреатом Нобелевской премии И. Пригожиным) является существенной частью синергетики — науки о процессах самоорганизации в природе. Разработке асимптотических методов исследования математических моделей контрастных диссипативных структур посвящен большой цикл работ, выполненных авторами, их коллегами и учениками [1–6].

В настоящей работе рассматривается вопрос о том, как из начальной функции достаточно общего вида, заданной для уравнения (1), с течением времени формируется контрастная структура, т. е. решение с резким внутренним переходным слоем, и описываются возможные сценарии дальнейшего поведения этого переходного слоя.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать уравнение (1) в области $D = \{0 < x < 1,\ t > 0\}$ с начальным условием

$$u(x, 0, \varepsilon) = u^0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad (2)$$

и краевыми условиями второго рода (условиями непроницаемости границы)

$$u_x(0, t, \varepsilon) = u_x(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t > 0. \qquad (3)$$

Функции $f(u, x, t)$ и $u^0(x)$ считаем достаточно гладкими. Если положить в уравнении (1) $\varepsilon = 0$, то получим вырожденное уравнение

$$f(u, x, t) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \ \ t \leqslant 0. \qquad (4)$$

Пусть функция $f(u, x, t)$ является нелинейностью кубического типа, что характерно для многих прикладных задач. Более точно, пусть выполнено условие

(A_1). Уравнение (4) имеет в области $G = \{\underline{u} \leqslant u \leqslant \overline{u},\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ t > 0;\ \underline{u},\ \overline{u}$ — некоторые постоянные$\}$ три корня относительно u: $u = \varphi_i(x, t)$, $i = 0, 1, 2$, причем

$$\underline{u} < \varphi_1(x,t) < \varphi_0(x,t) < \varphi_2(x,t) < \overline{u}$$
$$\text{при } (x,t) \in \bar{D} = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ t \geqslant 0\},$$
$$f_u(\varphi_i(x,t), x, t) > 0 \quad \text{для } i = 1, 2 \text{ и } (x,t) \subset \bar{D}.$$

Начальную функцию $u^0(x)$ из условия (2) подчиним следующему требованию:

(A_2). Существует число $x_0 \in (0, 1)$, такое, что

$$\underline{u} < u^0(x) < \varphi_0(x, 0) \quad \text{при } 0 \leqslant x < x_0,$$
$$u^0(x_0) = \varphi_0(x_0, 0),$$
$$\varphi_0(x, 0) < u^0(x) < \overline{u} \quad \text{при } x_0 < x \leqslant 1.$$

Это условие показывает, что график начальной функции $u = u^0(x)$ имеет ровно одну точку пересечения с графиком корня $u = \varphi_0(x, 0)$ уравнения (4) при $t = 0$. Как мы увидим дальше, именно в окрестности точки x_0 будет происходить формирование резкого внутреннего переходного слоя. Если таких точек несколько, то появится несколько переходных слоев и формирование каждого из них можно описать так же, как формирование слоя в окрестности точки x_0. В следующем пункте мы покажем, что формирование переходного слоя происходит за короткий промежуток времени порядка $O(\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|)$.

---

*) Weirstraass-Institut (WIAS), Berlin, Germany.

2. Асимптотика решения на временном промежутке $0\leqslant t\leqslant A\varepsilon^2|\ln\varepsilon|$

Прежде всего отметим, что вопрос о существовании решения задачи (1)–(3) при условиях (A_1) и (A_2) решается весьма просто. Постоянные функции, равные соответственно $\underline{u}$ и $\overline{u}$, являются нижним и верхним решениями задачи (1)–(3) и, следовательно, существует (единственное) решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1)–(3), и справедливы неравенства

$$\underline{u}<u(x,t,\varepsilon)<\overline{u} \quad \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\ t\geqslant 0.$$

Для построения асимптотики решения на временном промежутке $0\leqslant t\leqslant t_A=A\varepsilon^2|\ln\varepsilon|$ (число A уточним ниже) сделаем замену переменных $t=\varepsilon^2\tau$. Задача (1)–(3) примет вид ($\overline{u}(x,\tau,\varepsilon)=u(x,\varepsilon^2\tau,\varepsilon)$)

$$\varepsilon^2\overline{u}_{xx}-\overline{u}_\tau=f(\overline{u},x,\varepsilon^2\tau),\qquad 0<x<1,\quad \tau>0, \tag{5}$$

$$\overline{u}(x,0,\varepsilon)=u^0(x),\qquad 0<x<1, \tag{6}$$

$$\overline{u}_x(0,\tau,\varepsilon)=\overline{u}_x(1,\tau,\varepsilon)=0,\quad \tau>0. \tag{7}$$

При $\varepsilon=0$ из (5),(6) получаем задачу

$$-\tilde{u}_\tau=f(\tilde{u},x,0),\quad \tau>0,\quad \tilde{u}(x,0)=u^0(x), \tag{8}$$

в которую x входит как параметр.

Из условий (A_1) и (A_2) следует, что для любого $x\in[0,1]$ решение $\tilde{u}(x,\tau)$ задачи (8) является монотонной функцией τ, причем

$$\lim_{\tau\to\infty}\tilde{u}(x,\tau)=\begin{cases}\varphi_1(x,0) & \text{при } 0\leqslant x<x_0,\\ \varphi_2(x,0) & \text{при } x_0<x\leqslant 1,\end{cases} \tag{9}$$

$$\tilde{u}(x_0,\tau)=\varphi_0(x_0,0)\quad \text{при } \tau\geqslant 0.$$

Возьмем любое положительное число δ, столь малое, что

$$\delta<\min(x_0,1-x_0). \tag{10}$$

Тогда в силу (9) для любого числа $\eta>0$ найдется такое $\tau_\delta=\tau_\delta(\eta)$, что будут выполнены неравенства

$$\begin{gathered}|\tilde{u}(x,\tau)-\varphi_1(x,0)|\leqslant\eta \quad \text{при } 0\leqslant x\leqslant x_0-\delta,\ \tau\geqslant\tau_\delta,\\ |\tilde{u}(x,\tau)-\varphi_2(x,0)|\leqslant\eta \quad \text{при } x_0+\delta\leqslant x\leqslant 1,\ \tau\geqslant\tau_\delta.\end{gathered} \tag{11}$$

Введем обозначение

$$\min\left\{\min_{0\leqslant x\leqslant 1}f_u(\varphi_1(x,0),x,0),\ \min_{0\leqslant x\leqslant 1}f_u(\varphi_2(x,0),x,0)\right\}=2m. \tag{12}$$

Из условия (A_1) следует, что $m>0$. Поэтому существует число $\eta_0>0$ такое, что для любого $x\in[0,1]$ выполнено неравенство

$$\begin{gathered}f_u(u,x,0)\geqslant m\\ \text{при } |u-\varphi_1(x,0)|\leqslant\eta_0 \text{ и } |u-\varphi_2(x,0)|\leqslant\eta_0.\end{gathered} \tag{13}$$

Отсюда следует, что предельный переход (9) имеет экспоненциальный характер. Более точно, справедлива

Лемма 1. *Пусть m и η_0 — числа, определенные в* (12) *и* (13). *Тогда для любого положительного $\delta>0$, удовлетворяющего* (10), *существует такое $\tau_\delta>0$, что*

$$\begin{gathered}|\tilde{u}(x,\tau)-\varphi_1(x,0)|\leqslant\eta_0\exp\{-m(\tau-\tau_\delta)\}\\ \textit{при } 0\leqslant x\leqslant x_0-\delta,\ \tau\geqslant\tau_\delta,\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}|\tilde{u}(x,\tau)-\varphi_2(x,0)|\leqslant\eta_0\exp\{-m(\tau-\tau_\delta)\}\\ \textit{при } x_0+\delta\leqslant x\leqslant 1,\ \tau\geqslant\tau_\delta.\end{gathered} \tag{15}$$

Доказательство. Для любого $\delta>0$ возьмем $\tau_\delta=\tau_\delta(\eta_0)$, для которого выполнены неравенства (11) при $\eta=\eta_0$, и представим правую часть уравнения (8) при $0\leqslant x\leqslant x_0-\delta$ в виде

$$\begin{gathered}f(\tilde{u}(x,\tau)x,0)=\\ =f(\varphi_1(x,0),x,0)+f_u^*\left(\tilde{u}(x,\tau)-\varphi_1(x,0)\right)=\\ =f_u^*(\tilde{u}(x,\tau)-\varphi_1(x,0)),\end{gathered}$$

где f_u^* обозначает производную, взятую в промежуточной точке, а само уравнение (8) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tilde{u}(x,\tau)-\varphi_1(x,0)\right)=-f_u^*\left(\tilde{u}(x,\tau)-\varphi_1(x,0)\right). \tag{16}$$

В силу (11) и (13) $|\tilde{u}(x,\tau)-\varphi_1(x,0)|\leqslant\eta_0$, $f_u^*\geqslant m$ при $0\leqslant x\leqslant x_0-\delta$, $\tau\geqslant\tau_\delta$. Отсюда и из (16) непосредственно следует оценка (14). Оценка (15) доказывается таким же образом. Лемма 1 доказана.

В дальнейшем нам понадобятся оценки производных решения $\tilde{u}(x,\tau)$ задачи (8). Введем обозначение $\tilde{f}_u(x,\tau)=f_u(\tilde{u}(x,\tau),x,0)$. Так как $\underline{u}<\tilde{u}(x,\tau)<\overline{u}$ при $0\leqslant x\leqslant 1$, $\tau\geqslant 0$ и $f_u(u,x,0)$ — ограниченная функция при $\underline{u}\leqslant u\leqslant\overline{u}$, $0\leqslant x\leqslant 1$, то существует такое число $p>0$, что

$$-\tilde{f}_u(x,\tau)\leqslant p\quad \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\ \tau\geqslant 0. \tag{17}$$

Продифференцировав теперь (8) по x, получим линейное дифференциальное уравнение относительно $\tilde{u}_x(x,\tau)$, откуда на основе (17) сразу же получается оценка

$$|\tilde{u}_x(x,\tau)|\leqslant c\exp\{p\tau\},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad \tau\geqslant 0, \tag{18}$$

где буквой c здесь и далее обозначается подходящее положительное число, не зависящее от ε. Аналогичным образом после двукратного дифференцирования (8) по x получаем оценку для $\tilde{u}_{xx}(x,\tau)$:

$$|\tilde{u}_{xx}(x,\tau)|\leqslant c\exp\{2p\tau\},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad \tau\geqslant 0, \tag{19}$$

Оценка (19) нам понадобится при доказательстве следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (A_1), (A_2) *и пусть A — любое число из интервала* $(0,1/p)$, *где p определено неравенством* (17). *Тог-*

да для решения $\overline{u}(x,\tau,\varepsilon)$ *задачи* (5)–(7) *имеет место представление*

$$\begin{gathered}\overline{u}(x,\tau,\varepsilon)=\tilde{u}(x,\tau)+O(\varepsilon^{1-pA}),\\ 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant \tau\leqslant \tau_A=A|\ln\varepsilon|.\end{gathered}\tag{20}$$

Доказательство. Введем функцию

$$U(x,\tau,\varepsilon)=\tilde{u}(x,\tau)+R(x,\tau,\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned}R(x,\tau,\varepsilon)=\varepsilon\Big[\tilde{u}_x(0,\tau)\sigma(x)\exp\Big\{-\frac{x}{\varepsilon}\Big\}&-\\ -\tilde{u}_x(1,\tau)\sigma(1-x)\exp\Big\{-\frac{1-x}{\varepsilon}\Big\}\Big]&,\end{aligned}\tag{21}$$

$\sigma(x)$ — срезающая функция, равная единице при $0\leqslant x\leqslant\delta$ и нулю при $2\delta\leqslant x\leqslant 1$, δ — сколь угодно малое фиксированное (не зависящее от ε) число.

Используя оценку (19), нетрудно проверить, что

$$L_\varepsilon U\equiv\varepsilon^2U_{xx}-U_t-f(U,x,\varepsilon^2\tau)=O(\varepsilon^{p\tau})$$

$$\text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant\tau\leqslant\tau_A.$$

Кроме того, $U_x(0,\tau,\varepsilon)=U_x(1,\tau,\varepsilon)=0$, $U(x,0,\varepsilon)=u^0(x)$.

Сделаем теперь в задаче (5)–(7) замену переменных:

$$\overline{u}(x,\tau,\varepsilon)=U(x,\tau,\varepsilon)+w(x,\tau,\varepsilon)\exp\{p\tau\}.\tag{22}$$

Тогда для $w(x,\tau,\varepsilon)$ получим задачу

$$\begin{aligned}\varepsilon^2w_{xx}-w_\tau-(p+h(x,\tau,\varepsilon))w&=\\ =\exp\{-p\tau\}L_\varepsilon U&=O(\varepsilon),\\ 0<x<1,\quad 0<\tau&\leqslant\tau_A,\end{aligned}\tag{23}$$

$$w_x(0,\tau,\varepsilon)=w_x(1,\tau,\varepsilon)=0,\quad w(x,0,\varepsilon)=0,$$

где $h(x,\tau,\varepsilon)=\int\limits_0^1 f_u(U+sw\exp\{p\tau\},x,\varepsilon^2\tau)\,ds>-p$.

Так как коэффициент $p+h(x,\tau,\varepsilon)$ в уравнении (23) положителен, в силу принципа максимума имеем:

$$w(x,\tau,\varepsilon)=O(\varepsilon)\text{ при } 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant\tau\leqslant\tau_A,$$

и, следовательно, из (22) получаем

$$\begin{aligned}\overline{u}(x,\tau,\varepsilon)=U(x,\tau)+O(\varepsilon)\exp\{p\tau\}&=\\ =U(x,\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{1-pA})&,\end{aligned}\tag{24}$$

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant\tau\leqslant\tau_A(\varepsilon).$$

А поскольку из (18) и (21) следует оценка

$$R(x,\tau,\varepsilon)=O(\varepsilon\exp\{p\tau\})=O(\varepsilon^{1-pA}),$$

то

$$U(x,\tau,\varepsilon)=\tilde{u}(x,\tau)+R(x,\tau,\varepsilon)=\tilde{u}(x,\tau)+O(\varepsilon^{1-pA})$$

и равенство (24) переходит в (20). Лемма 2 доказана.

Из лемм 1 и 2 вытекает следующее утверждение о формированиии контрастной структуры.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A_1), (A_2) *и пусть* m *и* p — *числа из* (13) *и* (17), *а* δ — *любое число, удовлетворяющее неравенству* (10). *Положим* $A=\frac{1}{p+m}$, $r=\frac{m}{p+m}$. *Тогда при достаточно малых* ε *для решения* $u(x,t,\varepsilon)$ *задачи* (1)–(3) *в момент времени* $t=t_A(\varepsilon)=A\varepsilon^2|\ln\varepsilon|$ *справедливы представления*

$$\begin{gathered}u(x,t_A(\varepsilon),\varepsilon)=\varphi_1(x,0)+O(\varepsilon^r)\ \textit{при}\ 0\leqslant x\leqslant x_0-\delta,\\ u(x,t_A(\varepsilon),\varepsilon)=\varphi_2(x,0)+O(\varepsilon^r)\ \textit{при}\ x_0+\delta\leqslant x\leqslant 1.\end{gathered}\tag{25}$$

Доказательство. В силу леммы 2

$$\begin{gathered}u(x,t_A(\varepsilon),\varepsilon)=\overline{u}(x,\tau_A(\varepsilon),\varepsilon)=\\ =\tilde{u}(x,\tau_A)+O(\varepsilon^{1-pA})=\tilde{u}(x,\tau_A)+O(\varepsilon^r),\end{gathered}$$

а в силу Леммы 1

$$\begin{gathered}|\tilde{u}(x,\tau_A)-\varphi_1(x,0)|\leqslant\\ \leqslant\eta_0\exp\{-m(\tau_A-\tau_\delta)\}=O(\varepsilon^{mA})=O(\varepsilon^r)\\ \text{при}\ \ 0\leqslant x\leqslant x-\delta.\end{gathered}$$

Поэтому

$$u(x,t_A(\varepsilon),\varepsilon)=\varphi_1(x,0)+O(\varepsilon^r)\text{ при } 0\leqslant x\leqslant x_0-\delta.$$

Аналогично доказывается второе равенство в (25). Теорема1 доказана.

Равенства (25) показывают, что в момент времени

$$t_A(\varepsilon)=A\varepsilon^2|\ln\varepsilon|,\quad\text{где}\quad A=\frac{1}{p+m}$$

решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1)–(3) вне δ-окрестности точки x_0 отличается от $\varphi_1(x,0)$ слева от x_0 и от $\varphi_2(x,0)$ справа от x_0 на величину порядка $O(\varepsilon^r)$, т. е. к этому времени контрастная структура с переходным слоем в окрестности точки x_0 сформировалась.

3. Движение переходного слоя при $t\geqslant t_A(\varepsilon)$

Введем теперь новый масштаб времени $t=\varepsilon s$ и рассмотрим уравнение ($\hat{u}(x,s,\varepsilon)=u(x,\varepsilon s,\varepsilon)$)

$$\varepsilon^2\hat{u}_{xx}-\varepsilon\hat{u}_s=f(\hat{u},x,\varepsilon s)\tag{26}$$

на конечном интервале нового времени

$$s_A(\varepsilon)\leqslant s\leqslant\overline{s},$$

где $s_A(\varepsilon)=\frac{t_A(\varepsilon)}{\varepsilon}=A\varepsilon|\ln\varepsilon|$, $A=\frac{1}{p+m}$ — число, введенное в теореме 1. К уравнению (26) добавим начальное условие

$$\hat{u}(x,s_A(\varepsilon),\varepsilon)=u_A(x,\varepsilon)\quad\text{при } 0\leqslant x\leqslant 1$$

и граничные условия

$$\hat{u}_x(0,s,\varepsilon)=u_x(1,s,\varepsilon)=0\quad\text{при } s_A(\varepsilon)\leqslant s\leqslant\overline{s},$$

где $u_A(x,\varepsilon)=u(x,t_A(\varepsilon),\varepsilon)$ — решение задачи (1)–(3) в момент времени $t=t_A(\varepsilon)$ (в этот момент справедливы равенства (25)).

Дальнейшее поведение переходного слоя связано со знаком функции

$$I(x,t)=\int\limits_{\varphi_1(x,t)}^{\varphi_2(x,t)} f(u,x,t)\,du. \qquad (27)$$

(A_3). Пусть существует число $x_1\in(x_0,1]$, такое, что

$$I(x,0)>0 \text{ при } x_0\leqslant x\leqslant x_1.$$

Рассмотрим две вспомогательные краевые задачи на полупрямых:

$$\frac{d^2Q^{(-)}}{d\rho^2}+v\frac{dQ^{(-)}}{d\rho}=f(\varphi_1(x,0)+Q^{(-)},x,0),\quad \rho<0,$$

$$Q^{(-)}(0)=\varphi_0(x,0)-\varphi_1(x,0),\quad Q^{(-)}(-\infty)=0; \quad (28)$$

$$\frac{d^2Q^{(+)}}{d\rho^2}+v\frac{dQ^{(+)}}{d\rho}=f(\varphi_2(x,0)+Q^{(+)},x,0),\quad \rho>0,$$

$$Q^{(+)}(0)=\varphi_0(x,0)-\varphi_2(x,0),\quad Q^{(+)}(+\infty)=0; \quad (29)$$

где v и x — параметры.

В [7] доказано, что при условии (A_3) для любого $x\in[x_0,x_1]$ и для любого v из некоторого интервала краевые задачи (28) и (29) имеют решения $Q^{(-)}(\rho,v,x)$ и $Q^{(+)}(\rho,v,x)$, удовлетворяющие неравенствам $|Q^{(\mp)}(\rho,v,x)|\leqslant c\exp\{-k|\rho|\}$, где k — некоторое положительное число, и для каждого $x\in[x_0,x_1]$ существует единственное значение $v(v=v_0(x))$, такое, что

$$\frac{dQ^{(-)}}{d\rho}(0,v_0(x),x)=\frac{dQ^{(+)}}{d\rho}(0,v_0(x),x).$$

В силу этого равенства функция

$$\tilde{Q}(\rho,v_0(x),x)=\begin{cases} Q^{(-)}(\rho,v_0(x),x)+\varphi_1(x,0), \\ \qquad\qquad \rho\leqslant 0,\ x_0\leqslant x\leqslant x_1, \\ Q^{(+)}(\rho,v_0(x),x)+\varphi_2(x,0), \\ \qquad\qquad \rho\geqslant 0,\ x_0\leqslant x\leqslant x_1, \end{cases}$$

является гладкой в области $\{-\infty<\rho<+\infty,\ x_0\leqslant x\leqslant x_1\}$. Функция $v_0(x)$ удовлетворяет соотношению (см. [7])

$$v_0(x)=\frac{I(x,0)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial\rho}(\rho,v_0(x),x)\right)^2 d\rho}, \qquad (30)$$

которое можно расматривать как уравнение для нахождения $v_0(x)$.

Будем считать, что функция $v_0(x)$ определена, и рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{ds}=v_0(x),\quad s\geqslant s_A(\varepsilon) \qquad (31)$$

с начальным условием

$$x(s_A(\varepsilon))=x^0. \qquad (32)$$

Из условия (A_3) и выражения (30) следует, что $v_0(x)>0$ при $x_0\leqslant x\leqslant x_1$. Поэтому решение $x=\overline{x}(s)$ задачи (31), (32) существует и является монотонно возрастающей функцией s по крайней мере в интервале $s_A(\varepsilon)\leqslant s\leqslant s_1$, где s_1 определяется равенством $\overline{x}(s_1)=x_1$.

Функция $x=\overline{x}(s)$ описывает движение фронта переходного слоя на интервале $s_A(\varepsilon)\leqslant s\leqslant s_1$. Обоснование этого проводится с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, различные аспекты применения которого можно найти в [2]. Этот метод положен в основу исследования дальнейшего поведения фронта. Используя результаты работы [5], можно рассмотреть ряд задач о выходе фронта решения задачи (1)–(3) на стационарные режимы, в частности о выходе на периодический режим. Иллюстрации этого и посвящен заключительный раздел статьи.

4. Возможные сценарии поведения переходного слоя при больших временах

а) Пусть $f(u,x,t)$ является T-периодической по времени функцией. Рассмотрим уравнение (1) с граничными условиями (3), заменив начальное условие условием периодичности

$$u(x,t)=u(x,t+T). \qquad (33)$$

В работе [4] показано, что при выполнении условия (A_1) задача (1), (3), (33) имеет два асимптотически устойчивых T-периодических решения, одно из которых $u_1(x,t,\varepsilon)$ при малых ε близко к $\varphi_1(x,t)$, а другое $u_2(x,t,\varepsilon)$ — к $\varphi_2(x,t)$. Существование T-периодичекого решения с внутренним переходным слоем связано со следующим условием.

(A_4). Уравнение $I(x,t)=0$, где $I(x,t)$ — функция, введенная соотношением (27), имеет единственное T-периодическое решение $x=x^0(t)$, причем $0<x^0(t)<1$ и $I_x(x^0(t),t)<0$ при всех t.

В этом случае существует T-периодическое асимптотически устойчивое решение $u_3(x,t,\varepsilon)$ с внутренним переходным слоем, удовлетворяющее предельному соотношению.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u(x,t,\varepsilon)=\begin{cases}\varphi_1(x,t) \text{ при } 0\leqslant x<x^0(t),\\ \varphi_2(x,t) \text{ при } x^0(t)<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Выход решения $u(x,t,\varepsilon)$ начально-краевой задачи (1)–(3) на один из периодических режимов $u_i(x,t,\varepsilon)$ $(i=1,2,3)$ связан с условием (A_3) либо (A_4).

Пусть условие (A_3) $(I(x,0)>0)$ выполняется при всех $x\in[0,1]$. В этом случае внутренний слой, сформировавшийся вблизи точки x_0, за время порядка ε приближается к правой границе, где он разрушается, а решение $u(x,t,\varepsilon)$ остается в дальнейшем вблизи T-периодического решения $u_1(x,t,\varepsilon)$. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_3). *Тогда при достаточно малых* ε *существует единственное решение* $u(x,t,\varepsilon)$ *начально-краевой задачи* (1)–(3), *такое, что*

$$\lim_{t\to\infty}[u(x,t,\varepsilon)-u_1(x,t,\varepsilon)]=0. \qquad (34)$$

Если $I(x,0)<0$ *при* $x\in[0,1]$, *то в равенстве* (34) $u_1(x,t,\varepsilon)$ *нужно заменить на* $u_2(x,t,\varepsilon)$.

Если выполнены условия (A_1), (A_2) и (A_4), то сформировавшийся в окрестности точки x_0 фронт быстро (за время порядка ε) приблизится к фронту переходного слоя решения $u_3(x,t,\varepsilon)$, локализованному вблизи периодически движущейся точки $x=x^0(t)$, и в дальнейшем будет оставаться вблизи него.

б) Если правая часть f уравнения (1) не зависит от времени, т.е. $f=f(u,x)$, то при выполнении условий (A_1), (A_2) и (A_4), в котором $I(x,t)\equiv I(x)$, существует стационарное решение $u_s(x,\varepsilon)$ задачи (1), (3) с внутренним переходным слоем, локализованным вблизи точки x^0, где x^0 — корень уравнения $I(x)=0$. Сформировавшийся в окрестности точки x_0 фронт внутреннего переходного слоя решения $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1)–(3) приблизится за время порядка ε к фронту переходного слоя стационарного решения $u_s(x,\varepsilon)$, и это стационарное решение будет пределом при $t\to\infty$ решения $u(x,t,\varepsilon)$ [6].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 04-01-00710) и РФФИ–ННО (грант 03-01-04001).

Литература

1. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.* // Автоматика и телемеханика. 1997. №7. С. 4.
2. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.* // Фундаментальная и прикладная математика. 1998.**4**, №3. С. 799.
3. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.* // Ломоносовские чтения. Сборник расширенных тезисов докладов. Физ. фак. МГУ, 2003. С. 33.
4. *Нефедов Н.Н.* // Дифференциальные уравнения. 2000. **36**, №2. С. 262.
5. *Nefedov N.N., Radzinus M., Schneider K.R., Vasil'eva A.B.* // J. Comp. Math. Math. Phys. 2005. **45**. №1.
6. *Бутузов В.Ф., Неделько И.В.* // Матем. сборник. 2001. **192**, №5. С. 13.
7. *Fife P.C., Hsio L.* // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 1988. **12**, №1. P. 19.

Поступила в редакцию
03.11.04