

УДК 539.12.01

ЦВЕТОВОЙ ФЕРРОМАГНЕТИЗМ $SU(2)$ -КАЛИБРОВОЧНОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПОЛЯ ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

В. Ч. Жуковский, О. В. Тарасов, Д. Эберт^{*)}

(кафедра теоретической физики)

E-mail: zhukovsk@phys.msu.su

Исследована возможность цветового ферромагнетизма в КХД с группой $SU(2)$. Рассмотрен фазовый переход между этим состоянием и цветовой сверхпроводимостью. Произведен анализ влияния на него температурных эффектов.

Введение

Для объяснения различных непертурбативных явлений в квантовой теории неабелевых полей особенно важную роль приобретают калибровочные конфигурации, являющиеся решениями уравнений Янга–Миллса и локально минимизирующие калибровочное действие. С точки зрения континуального интеграла такие конфигурации являются седловыми точками. Во многих случаях их вклад в континуальный интеграл невозможно учесть в рамках теории возмущений и приходится использовать непертурбативные методы.

Одним из решений уравнений Янга–Миллса является постоянное хромомангнитное поле. Его роль была продемонстрирована в [1, 2]. В этих статьях авторы рассчитали для постоянного хромомангнитного поля B эффективный потенциал в однопетлевом приближении и показали, что он достигает своего минимума при ненулевом значении B .

Однако постоянное хромомангнитное поле, являясь решением уравнений Янга–Миллса, тем не менее не минимизирует действие ввиду наличия тахионных мод в спектре глюонных возбуждений на его фоне. В частности, как показано в [3, 4], эффективный потенциал, найденный в [1], содержит отличную от нуля мнимую часть. Эта проблема впоследствии исследовалась во многих работах. В частности, предлагались способы стабилизации вакуума путем введения ненулевой заряженной части калибровочного поля. Однако локальный минимум действия не мог быть получен, так как соответствующая полевая конфигурация получалась пространственно неоднородной. Рассматривалась также возможность термализации системы [5, 6] и введения конденсата временной компоненты калибровочного поля $A_0 \neq 0$ [7, 8].

В работах [9, 10] использовался известный путь решения, ранее применявшийся при анализе квантового эффекта Холла [11] и заключающийся в следующем. Принимая в качестве начальной точки постоянное хромомангнитное поле (нестабильный, «ложный» вакуум), производится спуск вдоль нестабильной

моды к состоянию, где она становится стабильной (истинный вакуум). Авторы [9, 10] (см. также [12]) впервые показали, что в результате, в отличие от предыдущих работ, где возникали неоднородности, можно получить пространственно однородное состояние вакуумного конденсата. Для этого следует, сделав некоторые допущения, эффективно понизить размерность задачи, равную $(3 + 1)$, до $(2 + 1)$, применив для глюонов технику, подобную той, что использовалась в [11] для описания квантового эффекта Холла в $(2+1)$ -мерном фермионном газе. Возникающая калибровочная конфигурация нарушает цветовую симметрию и потому для ее стабильного существования необходимо компенсировать возникающий ненулевой цветовой заряд. В связи с этим следует рассматривать хромомангнитное поле, взаимодействующее с фермионами (кварками), имеющими цветовой заряд. При этом плотность фермионов должна быть более высокой, чем в адронной фазе вещества.

В КХД с фермионами возможен также и другой способ выигрыша энергии. Это механизм цветовой сверхпроводимости. В общих чертах он возникает следующим образом (см., напр., [13, 14]). В очень плотной среде кварки становятся асимптотически свободными, их взаимодействие становится достаточно слабым и между ними может возникнуть притяжение. Более дальнедействующие компоненты взаимодействия экранируются. В результате возникает возможность для кварков разных цветов и ароматов с противоположными импульсами образовывать куперовские пары, что приводит к выигрышу энергии.

Изучение условий возникновения цветовой сверхпроводимости еще далеко до своего завершения. В то же время создание среды с необходимой плотностью $\sim 10^{14}$ г/см³ в лабораторных условиях пока невозможно. Такие плотности могут возникать, например, в компактных звездах. Однако пока нет однозначных свидетельств наличия или отсутствия в них цветовой сверхпроводимости [15, 16].

В настоящей статье мы рассматриваем цветовой ферромагнетизм и цветовую сверхпроводимость как

^{*)} D. Ebert (Humboldt University, Berlin).

две взаимоисключающие фазы. Наша цель — учесть роль фермионов и их вклад в термодинамические величины в ферромагнитной фазе. Не рассматривая в деталях эффект цветовой сверхпроводимости, мы опишем выигрыш энергии за счет него с помощью упрощенной формулы, для того чтобы исследовать возможность фазового перехода между ферромагнитным и сверхпроводящим состояниями системы.

1. Бозонный сектор

Рассмотрим чисто калибровочную теорию Янга–Миллса с группой $SU(2)$ для поля A_μ^a ($a = 1, 2, 3$) в $(3+1)$ -мерном пространстве. Лагранжиан $L = -1/4 F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$ можно переписать в виде, демонстрирующем взаимодействие заряженного векторного поля с «электромагнитным» полем:

$$L = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} |(D_\mu \Phi_\nu - D_\nu \Phi_\mu)|^2 - ig f_{\mu\nu} \Phi_\mu^+ \Phi_\nu + \frac{g^2}{4} (\Phi_\mu^+ \Phi_\nu - \Phi_\nu^+ \Phi_\mu)^2, \quad (1)$$

где введены следующие обозначения: $A_\mu = A_\mu^3$ — нейтральное («электромагнитное») поле, $f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — соответствующий тензор; $\Phi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 + iA_\mu^2)$ — заряженное поле, $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$.

«Электромагнитное» поле в нашей задаче будем считать постоянным хромагнитным, направим его вдоль оси z , а калибровку выберем в несимметричном виде, причем для начала предположим, что заряженное поле отсутствует:

$$A_\mu = (A_0, \mathbf{A}) = (0, (0, x_1 B, 0)), \quad (2)$$

$$\Phi_\mu = \Phi_\mu^+ = 0.$$

Этот набор (A, Φ) является решением уравнений поля. Однако если рассмотреть линейризованные уравнения для заряженного поля Φ , взаимодействующего с внешним хромагнитным полем A_μ , то соответствующие стационарные решения можно записать в виде $\Phi_\mu = e^{-iEx_0 + ik_3 x_3 + ik_2 x_2} f_{n\mu}(x_1 - k_2/gB)$, где $f_{n\mu}(x)$ выражаются через известные волновые функции гармонического осциллятора. Энергетический спектр имеет вид

$$E^2 = k_3^2 + 2gB(n + \frac{1}{2}) \pm 2gB, \quad (3)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Как видно, энергия становится мнимой при ориентации спина, соответствующей знаку «-», $n = 0$ для значений продольного импульса $k_3^2 < gB$ (так называемые тахионные моды). Наличие таких решений демонстрирует нестабильность данной конфигурации относительно сдвигов вдоль тахионных мод [3, 4].

В [9, 10] предлагается метод, с помощью которого удастся, спускаясь вдоль тахионных мод, достигнуть однородного квантового состояния Холла. При этом направление спуска определяется как раз условием

достижения однородности конечного решения. Требование однородности решения приводит, в частности, к тому, что выбираются лишь моды с $k_3 = 0$, так как не должно быть зависимости от x_3 . Легко видеть, что при этом возбуждаются самые «жесткие» моды.

С учетом этого предположения происходит эффективное понижение размерности пространства, в котором происходит стабилизация тахионной моды. Решения, не зависящие от x_3 , ищутся в виде функций

$$\Phi_\mu(x) = \Phi_\mu(x_0, x_1, x_2) \sqrt{L_3}, \quad (4)$$

где L_3 — протяженность магнитного поля вдоль оси x_3 . С учетом того, что у тензора «нейтрального» поля отлична от нуля лишь компонента f_{12} , нестабильная мода может быть описана скалярным полем φ в $(2+1)$ -мерном пространстве-времени с лагранжианом

$$L_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} |D_\mu \varphi|^2 + 2gB |\varphi|^2 - \frac{g^2}{2L_3} |\varphi|^4. \quad (5)$$

Лагранжиан (5) имеет сходство с хиггсовским, если рассматривать член взаимодействия с магнитным полем как отрицательный квадрат массы $m^2/2 = -2gB < 0$. Нестабильность симметричного решения $\varphi = 0$ соответствует нестабильности постоянного хромагнитного поля. Переход к стабильному решению, минимизирующему энергию, осуществляется путем сдвига вдоль тахионной моды к истинному вакууму.

Принципиальное отличие нашей модели от модели Хиггса состоит в том, что в лагранжиане присутствуют ковариантные производные, описывающие взаимодействие с магнитным полем. Поэтому в данной модели не существует однородных в пространстве решений для уравнений поля с этим лагранжианом. Для того чтобы свести задачу к известной ситуации с полем Хиггса и однородными вакуумными решениями, в [9] применялся метод, основанный на использованном в [11] подходе для описания фермионов в $(2+1)$ -мерном пространстве. В этом подходе рассматривается эффективная $(2+1)$ -мерная модель, эквивалентная исходной, с топологическим черн-саймоновским членом, включающая новые бозоны φ_a и векторное черн-саймоновское поле a_μ , описываемая лагранжианом

$$L_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} |(i\partial_\mu - gA_\mu + a_\mu)\varphi_a|^2 + 2gB |\varphi_a|^2 - \frac{g^2}{2L_3} |\varphi_a|^4 + \frac{\epsilon_{\mu\nu\lambda}}{4\alpha} a_\mu \partial_\nu a_\lambda, \quad (6)$$

где $\mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2$. Как известно [17], черн-саймоновский член изменяет статистику частиц, наделяя их дополнительным магнитным потоком, и делает ее, вообще говоря, дробной, в зависимости от параметра α . Сохраняется статистика лишь при $\alpha = 2\pi k$, где k — целое число. В [9, 11] указано,

что этого достаточно для того, чтобы описываемые лагранжианами (5) и (6) модели были динамически эквивалентными. При этом поле φ_a описывает новые бозоны, которые конденсируются на пространственно-однородном решении: $\varphi_a = v = \text{const}$. Это решение возникает, когда черн-саймоновское поле a_μ полностью компенсирует магнитное поле A_μ в ковариантных производных, что делает модель чисто хиггсовской: $a_i = gA_i$ для $i = 1, 2$.

Вообще говоря, для поиска истинного вакуума не всегда следует совершать сдвиг вдоль всех неустойчивых мод, может оказаться достаточно спуститься вдоль части из них. Например, в известном случае n -мерной хиггсовой ямы тривиальное решение имеет n неустойчивых мод, но для достижения настоящего минимума достаточно спуститься вдоль одной моды. Но в данном случае, когда размерность задачи эффективно понижена, может быть лишь уверенность в том, что найденная конфигурация будет устойчива относительно $(2+1)$ -мерных возмущений.

Действительно надежной гарантией того, что найденное решение является истинным вакуумом, т. е. устойчиво также и относительно неоднородных вдоль хромагнитного поля возмущений, является отсутствие тахионных мод с импульсами $k_3 \neq 0$.

Из (3) следует, что нестабильными будут все моды с $n = 0$, отрицательным знаком проекции спина глюонов и продольными импульсами $k_3^2 < gB$. Для того чтобы не существовало тахионных мод с $k_3 \neq 0$, достаточно сделать протяженность поля L_3 вдоль оси z конечной. В этом случае, накладывая на заряженное поле периодические условия вдоль этой оси $A_\mu^{1,2}(0) = A_\mu^{1,2}(L_3)$, мы получаем условие дискретизации импульса: $k_3 = 2\pi n_3/L_3$, где n_3 должно быть целым. Чтобы избавиться от тахионных мод с $|k_3| \neq 0$, необходимо потребовать, чтобы самые низколежащие неоднородные моды ($n_3 = \pm 1$) обладали все же положительным квадратом энергии, а это в свою очередь накладывает ограничение на максимально возможную протяженность хромагнитного поля L_3^{max} ($L_3 \leq L_3^{\text{max}}$):

$$\left(\frac{2\pi}{L_3^{\text{max}}}\right)^2 = gB_0. \quad (7)$$

Это ограничение придает физический смысл выбору лишь однородного по оси z решения, осуществленному в работах [9, 10]. В самом деле, вместо однородного во всем пространстве постоянного хромагнитного поля можно рассматривать лишь один домен, внутри которого направление и величина хромагнитного поля постоянны. Ограничение на его максимальный размер и граничные условия простейшим образом моделируют ситуацию, когда он окружен другими доменами, внутри которых хромагнитное поле имеет другую величину, пространственную и групповую ориентации. Вопрос о граничных эффектах, которые неизбежно возникнут при соприкосновении доменов, в настоящей статье

мы не исследуем, сводя их к периодическим условиям по x_3 .

Само по себе «включение» постоянного и однородного абелевого хромагнитного поля не приводит к образованию цвета, так как оно является нейтральным по цвету. Однако присутствие конденсата заряженного поля нарушает цветовую нейтральность. Поскольку допустимыми являются лишь бесцветные состояния системы, то приходим к выводу, что в чисто калибровочной теории такое состояние невозможно. Как предложено в [9], для стабилизации системы следует ввести еще поле кварков, которое являлось бы поставщиком цветового заряда, восстанавливая таким образом цветовую нейтральность системы.

2. Фермионный сектор

Калибровочная конфигурация, состоящая из постоянного хромагнитного поля и заряженного однородного конденсата, несет нетривиальный цветовой заряд. Сделать систему нейтральной можно, введя фермионы, взаимодействующие с этой конфигурацией. Будем рассматривать безмассовые фермионы в фундаментальном представлении. Поскольку плотность рассматриваемой фермионной среды значительно превышает плотность адронной фазы, кварки становятся асимптотически свободными. Не учитывая взаимодействия между ними, можно описать их свободным уравнением Дирака:

$$i\gamma_\mu D_\mu \Psi = 0, \quad (8)$$

где $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$. Фермионы, обладающие конечной плотностью, займут в основном состоянии некоторое количество нижних уровней спектра, определяемого внешним калибровочным полем A_μ . Их полная энергия, являющаяся суммой энергий всех занятых уровней, будет зависеть от внешнего поля. Сделанные в (7) ограничения сводятся к следующему: область трехмерного пространства, занятая кварками, ограничена по оси x_3 интервалом $(0, L_3^{\text{max}})$, где $L_3^{\text{max}} = 2\pi/\sqrt{gB}$. Наша цель — исследовать, будет ли энергетически выгодно, не меняя размеров рассматриваемого домена, «включить» или «выключить» хромагнитное поле.

Для определения фазы, в которой будет находиться система при нулевой или конечной температуре, нам необходимо знание спектра оператора Дирака. Он хорошо известен для чисто хромагнитного поля [18]. В этом случае уравнение распадается на независимые уравнения для кварков разных цветов. Фермионы находятся в состояниях, определяемых квантовыми числами — цветом, спином, знаком энергии, номером уровня Ландау и двумя компонентами импульса: $\lambda = (c = \pm 1, s = \pm 1, \epsilon = \pm 1, n = 0, 1, 2, \dots, k_2, k_3)$, с энергией

$$E_\lambda^2 = \frac{g}{2}B(2n + 1 - s) + k_3^2,$$

где учтено, что эффективный заряд кварка $g' = \pm g/2$. Условие периодичности снова дела-

ет возможные значения импульсов дискретными $k_2 = 2\pi n_2/L_2$, $k_3 = 2\pi n_3/L_3$, где $n_{2,3}$ — целые. Вид волновой функции фермиона ограничивает максимально возможное значение k_2 , определяя тем самым степень вырождения по этому квантовому числу.

Однако, как было показано выше, кроме нейтрального хромомангнитного поля возникает также ненулевой конденсат заряженных компонент калибровочного поля, который взаимодействует с фермионами. В результате уравнение Дирака, вообще говоря, уже не распадается на независимые уравнения. Кроме того, в явном виде конденсат заряженного поля не может быть записан, поскольку пока предложено лишь его описание с помощью феноменологической модели, основанной на переходе к новым бозонам. В таких условиях решить уравнение Дирака затруднительно, и мы здесь вынуждены сделать соответствующие упрощающие предположения.

Заряженный конденсат изменяет структуру фермионных уровней, а также смешивает фермионы разных цветов. Изменение структуры энергетических уровней достаточно слабо повлияет на суммарную энергию фермионов и в настоящей статье не будет учитываться. Смешивание же фермионов разных цветов является как раз тем механизмом, благодаря которому основное состояние системы кварков может нести ненулевой цветовой заряд, за счет чего суммарный цветовой заряд бозонов и кварков станет нулевым.

3. Фазовый переход: нулевая температура

В электродинамике возможность образования бозе-конденсата куперовских пар несовместима с наличием ненулевого магнитного поля. Будучи заряженным, конденсат вытесняет магнитное поле за пределы образца сверхпроводника в силу эффекта Мейсснера. В неабелевом случае ситуация несколько иная. Так, в теории с группой $SU(2)$ кварки в фундаментальном представлении образуют дублет q_i ($i = 1, 2$), и дикварковый конденсат имеет структуру $\langle \varepsilon_{ij} q_i q_j \rangle$, являясь скаляром в цветовом пространстве. Поэтому не возникает явного противоречия между наличием цветового хромомангнитного поля и возможностью эффекта цветовой сверхпроводимости [19] (в случае группы $SU(2)$ это название становится весьма условным, поскольку конденсат не несет цветового заряда и не может быть его проводником). В случае КХД с группой $SU(3)$ конденсат имеет форму $\langle \varepsilon_{ijk} q_j q_k \rangle$, где $i, j, k = 1, 2, 3$, и уже не является зарядово нейтральным. Такой конденсат вытесняет из образца ту часть хромомангнитного поля, которая с ним могла бы взаимодействовать. В групповом пространстве нейтральное хромомангнитное поле может быть записано в виде суперпозиции коммутирующих генераторов λ_3 и λ_8 : $F_{12} = B_1 \lambda_3 + B_2 \lambda_8$. При этом, например, поле

$F_{12} \sim \lambda_3$ в принципе может сосуществовать лишь с конденсатом вида $\langle \varepsilon_{3jk} q_j q_k \rangle$.

Группа $SU(3)$ имеет максимальную абелеву подгруппу $U(1) \times U(1)$. В каждой из подгрупп $U(1)$ возможен либо ферромагнетизм, либо сверхпроводимость. В настоящей статье рассматривается калибровочная группа $SU(2)$. Однако, имея в виду возможность дальнейшего обобщения результатов на случай группы $SU(3)$, будем рассматривать ферромагнитную и сверхпроводящую фазы как взаимоисключающие, между которыми возможен фазовый переход.

При нулевой температуре выгодность той или иной фазы определяется величиной энергии в основном состоянии этой фазы. В рассматриваемом случае это сумма энергии хромомангнитного поля и энергий кварков, занимающих некоторое число низших уровней Ландау. Поскольку целью данной статьи является учет вклада фермионов, то плотность энергии хромомангнитного поля будем принимать равной $B^2/(8\pi)$, не учитывая выигрыша энергии за счет наличия заряженного конденсата и квантовых флуктуаций.

Так как в данной модели напряженность поля и его протяженность взаимно ограничивают друг друга, удобно сделать рассматриваемые величины безразмерными с помощью естественного безразмеривающего параметра L_3 (протяженности домена вдоль направления хромомангнитного поля) или максимально возможной напряженности хромомангнитного поля B_0 , см. (7). Вместо напряженности хромомангнитного поля B , плотности фермионов ρ и суммарной энергии кварков E_q введем соответственно безразмерное хромомангнитное поле $\alpha = B/B_0$, где $\alpha \in (0, 1)$, безразмерную плотность фермионов $x = \rho/(gB_0)^{3/2}$ и безразмерную полную энергию фермионов во внешнем поле $h(x, \alpha) = E_q/(2g^2 V B_0^2)$.

В отсутствие хромомангнитного поля полная энергия фермионов равна

$$E_q|_{B=0} = V B_0^2 2g^2 h\left(\frac{\rho}{(gB_0)^{3/2}}, 0\right). \quad (9)$$

При «включении» поля $B = \alpha B_0$ безразмерная энергия фермионов станет равной $h\left(\frac{\rho}{(gB_0)^{3/2}}, \alpha\right)$. Тогда энергия системы при «включении» поля αB_0 с учетом как изменения энергии фермионов, так и того, что к ней добавится энергия самого поля

$$E_B = V \frac{B^2}{8\pi} = V B_0^2 \frac{\alpha^2}{8\pi}, \quad (10)$$

изменится на величину

$$\Delta E = V B_0^2 \left[-2g^2 \left(h\left(\frac{\rho}{(gB_0)^{3/2}}, 0\right) - h\left(\frac{\rho}{(gB_0)^{3/2}}, \alpha\right) \right) + \frac{\alpha^2}{8\pi} \right]. \quad (11)$$

В рассматриваемой модели хромомангнитное поле B , определяемое величиной α , является свободным

параметром, в отличие от B_0 и ρ , которые считаются заранее заданными величинами. При этом α «подстроится» на интервале $(0, 1)$ под заданные параметры системы так, чтобы суммарная ее энергия была минимальна, $E = E_{\min}$. После оптимизации по α безразмерный выигрыш энергии за счет цветового ферромагнетизма становится функцией лишь безразмерной плотности фермионов:

$$\Delta e(x) = \frac{\Delta E_{\min}}{VB_0^2} = \min_{\alpha} \left[-2g^2(h(x, 0) - h(x, \alpha)) + \frac{\alpha^2}{8\pi} \right]. \quad (12)$$

Возможность образования ферромагнитной фазы ограничивается тем, что в отсутствие хромагнитного поля возможен выигрыш энергии за счет цветовой сверхпроводимости. Выигрыш энергии за счет образования куперовских пар равен [20]

$$\Delta E_{\text{CSC}} = -V \frac{\mu^2 \delta^2}{\pi^2}, \quad (13)$$

где δ — размер энергетической щели, который здесь для простоты будем считать постоянным. Отметим, что при нулевой температуре химический потенциал μ совпадает с радиусом сферы Ферми и тем самым определяет плотность фермионов.

Как видно, выигрыш энергии пропорционален площади сферы Ферми, т. е. квадрату энергии Ферми, что является следствием сделанного предположения о независимости δ от μ . Вопрос о том, выгодно ли отличное от нуля B , или, другими словами, выгоднее ли ферромагнитная фаза, чем сверхпроводящая, сводится теперь к сравнению выражений, соответствующих выигрышу безразмерной энергии в ферромагнитной Δe_{Ferr} и сверхпроводящей Δe_{CSC} фазах:

$$\Delta e_{\text{Ferr}} = \Delta e \left(\frac{\mu^3}{6\pi^2 (gB_0)^{3/2}} \right), \quad \Delta e_{\text{CSC}} = - \left(\frac{\delta}{\pi B_0} \right)^2 \mu^2. \quad (14)$$

Этот вопрос был проанализирован с помощью численного расчета.

На рис. 1 изображен безразмерный выигрыш фермионной энергии $\Delta h(x, \alpha) = h(x, \alpha) - h(x, 0)$ как функция безразмерной плотности фермионов x при фиксированном α . Видно, что эта разность всегда отрицательна (что свидетельствует о понижении энергии фермионов с включением поля) и осциллирует с ростом плотности. Причина осцилляций в заполнении очередного уровня Ландау и переходе на следующий уровень. Мы ожидаем, что при достаточно высокой температуре они должны исчезнуть.

На рис. 2 изображен график $\Delta h(x, \alpha)$ как функции безразмерного хромагнитного поля α при постоянной плотности фермионов. В целом, чем сильнее поле, тем ниже энергия фермионов, пока не наступит насыщение в момент, когда вместимость нижнего уровня Ландау не станет достаточной для

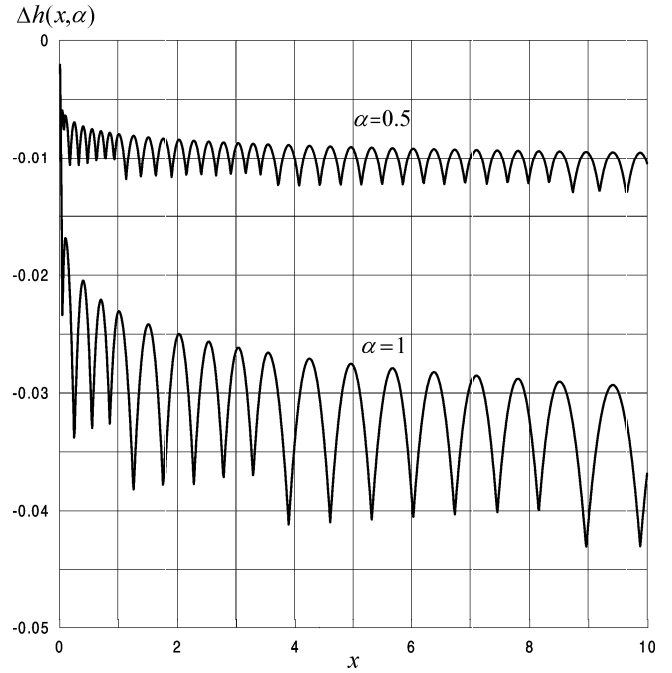


Рис. 1. Безразмерный выигрыш фермионной энергии $\Delta h(x, \alpha)$ как функция безразмерной плотности фермионов x при фиксированном α

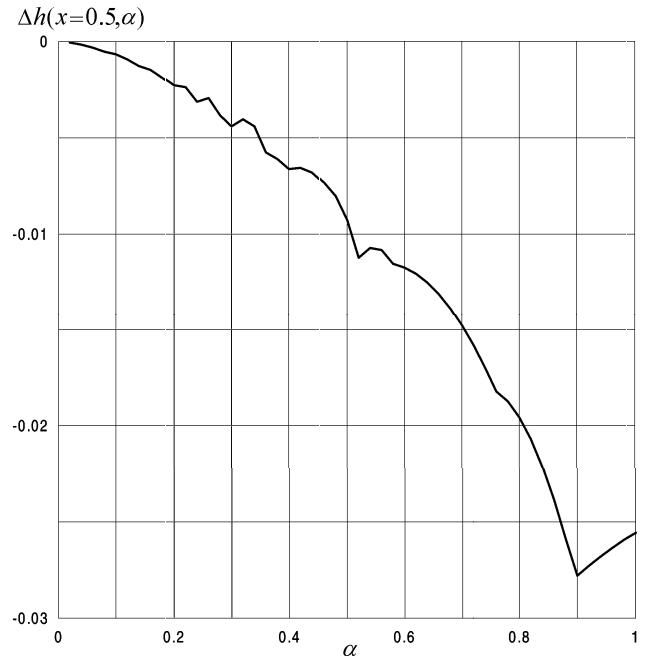


Рис. 2. Безразмерный выигрыш фермионной энергии $\Delta h(x, \alpha)$ как функция безразмерного хромагнитного поля α при постоянной безразмерной плотности фермионов x

того, чтобы разместить все фермионы. При рассмотренной достаточно высокой плотности фермионов это значение α находится далеко за пределами интервала $(0, 1)$.

На рис. 3 изображено полное изменение безразмерной энергии всей системы как функция безразмерного хромагнитного поля α . При нулевой плотности фермионов $x = 0$ включение поля невыгодно и зависимость параболическая. При конечных плотностях фермионов сначала рост поля выгоден,

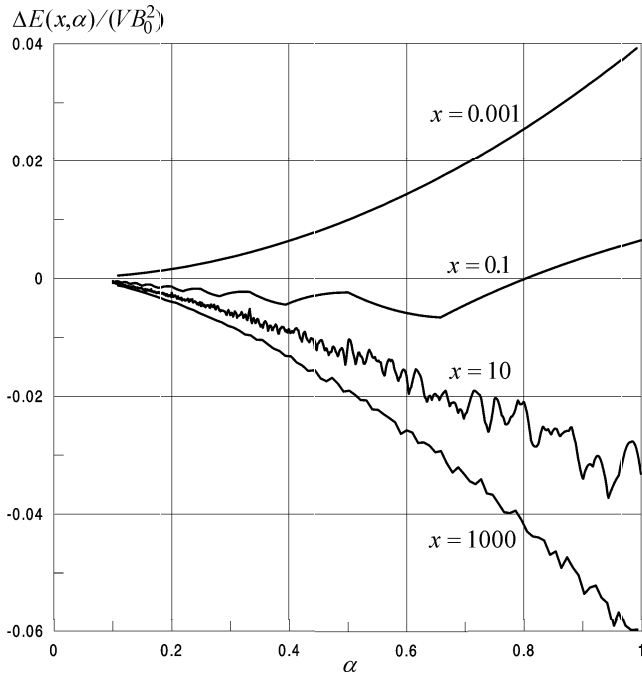


Рис. 3. Полное изменение безразмерной энергии всей системы как функция безразмерного хромомангнитного поля α

но когда все фермионы попадают на нижний уровень Ландау, энергия начинает расти как α^2 . При высоких плотностях это насыщение наступает при $\alpha > 1$, т. е. системе выгодно значение α , близкое к единице (необязательно $\alpha = 1$ из-за осцилляций).

На рис. 4 изображены безразмерные выигрыши энергии в ферромагнитной (после выбора оптимального α) и сверхпроводящей фазах как функция химического потенциала μ . Фаза определяется условием минимальности энергии. Выбор параметров

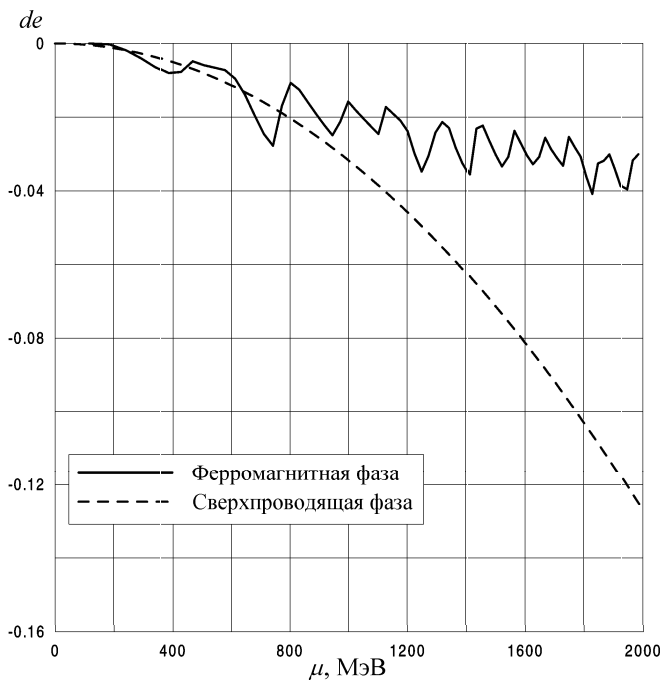


Рис. 4. Безразмерный выигрыш энергии в ферромагнитной (после выбора оптимального α) и сверхпроводящей фазах как функция химического потенциала μ

и формулы для сверхпроводящей фазы требует дальнейшего изучения. Тем не менее мы надеемся, что полученные в данной работе выводы качественно описывают возможный фазовый переход. При достаточно больших μ выгодна сверхпроводящая фаза. При снижении μ более выгодной может стать ферромагнитная фаза, произойдет фазовый переход. Однако ферромагнитный выигрыш энергии, как видно из графика, претерпевает при нулевой температуре осцилляции. Поэтому фазовая картина оказывается более сложной. При дальнейшем падении μ «возвращается» сверхпроводящая фаза, потом опять наступает ферромагнитная, и это может повториться несколько раз.

4. Ферромагнетизм при конечной температуре

При конечной температуре система описывается уже не энергией основного состояния, а термодинамическим потенциалом Ω . Вклад калибровочного поля без учета квантовых осцилляций и температурных эффектов равен $\Omega_B = VB^2/(8\pi)$, а вклад фермионов

$$\Omega_q = -T \sum_{\lambda} \ln \left(1 + e^{(\mu - E_{\lambda})/T} \right). \quad (15)$$

В отличие от случая нулевой температуры при конечной температуре химический потенциал μ уже не равен энергии Ферми, а становится независимой переменной. Например, равенство $\mu = 0$ уже не означает отсутствие фермионов.

Как и в случае с нулевой температурой, мы сначала безразмерим все величины с помощью gB_0 , включая температуру: $\tau = T/\sqrt{gB_0}$. По порядку величины $\sqrt{gB_0} \sim 10^2$ МэВ, что задает характерный масштаб для температуры: $T \sim 10^8$ эВ $\sim 10^{12}$ К.

Компьютерный расчет, аналогичный проделанному для случая $T = 0$, по необходимости является приближенным, поскольку суммировать приходится бесконечный ряд по всем энергетическим уровням фермионов. Его результаты показаны на рис. 5, 6.

На рис. 5 приведен безразмерный ферромагнитный выигрыш суммарного термодинамического потенциала, минимизированного по безразмерному хромомангнитному полю $\alpha = B/B_0$:

$$\Delta\omega(\mu, \tau) = \frac{\min_{\alpha} (\Omega_q(\alpha, \mu, T, B_0) + \Omega_B - \Omega_q(\alpha = 0, \mu, T, B_0))}{VB_0^2}. \quad (16)$$

Из графика видно, что с ростом температуры осцилляции в зависимости безразмерного выигрыша термодинамического потенциала ω от химического потенциала уменьшаются и в пределе исчезают. Другой важный эффект заключается в том, что даже при нулевом химическом потенциале выгодно возникновение ненулевого хромомангнитного поля. Это является следствием того, что при ненулевой

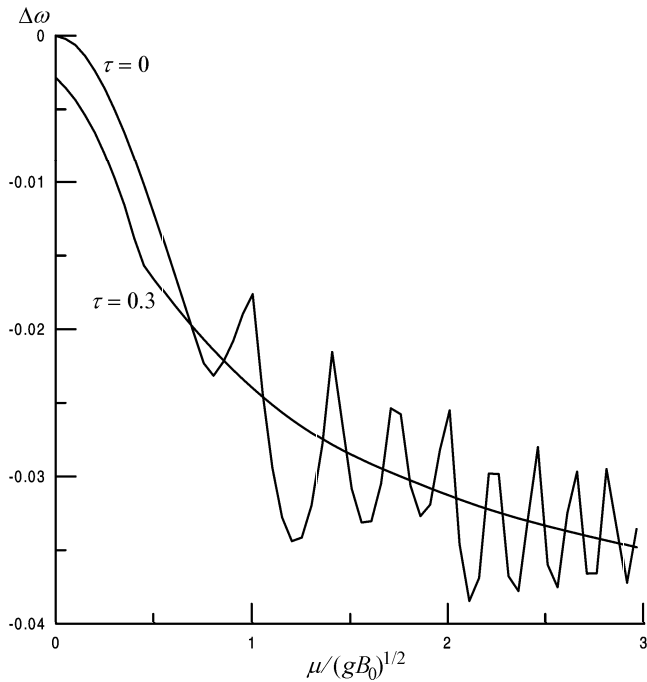


Рис. 5. Выигрыш безразмерного термодинамического потенциала $\Delta\omega$ как функция μ при нулевой и конечной (достаточно высокой) температурах

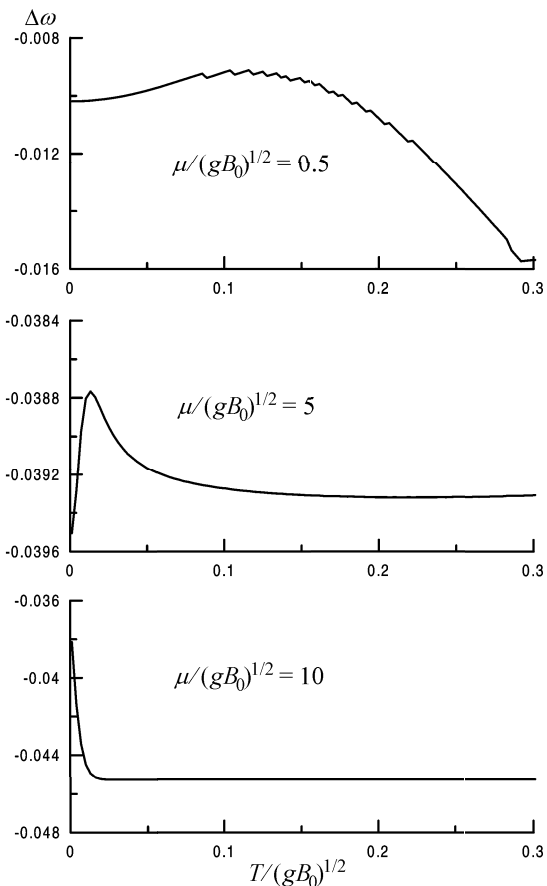


Рис. 6. Стабилизация выигрыша термодинамического потенциала с ростом T при различных значениях μ

температуре фермионы существуют даже при $\mu = 0$, и при этом за счет хромагнитного поля возможен выигрыш энергии.

На рис. 6 показано, как с ростом температуры выигрыш термодинамического потенциала $\Delta\omega$ стремится к постоянной величине при фиксированном μ . Видно, что чем выше величина химического потенциала, тем при более низкой температуре $\tau(\mu)$ происходит стабилизация $\Delta\omega$. При низких химических потенциалах $\Delta\omega$ с ростом температуры убывает и стабилизируется при достаточно высоких температурах. Эти факты можно объяснить следующим образом. Немонотонная зависимость $\Delta\omega(\mu)$ объясняется дискретностью спектра уровней Ландау. Она сохраняется до тех пор, пока температура значительно меньше, чем расстояние между уровнями в окрестности энергии Ферми. Очевидно, что по мере роста μ плотность энергетических уровней нарастает и требуется меньшая температура, чтобы сгладить осцилляции.

Заключение

В данной статье мы исследовали ферромагнитное состояние калибровочной модели с постоянным хромагнитным полем. Согласно [9], тахионные моды, присущие этой модели, могут стабилизироваться на пространственно-однородном состоянии, образуя заряженный конденсат. Это оказалось возможным, если протяженность хромагнитного поля вдоль его направления ограничена.

Основной задачей статьи являлось изучение фермионного сектора модели с точки зрения энергетической выгоды ферромагнитного состояния по сравнению с возможным сверхпроводящим состоянием. Картина получилась следующая.

При низких плотностях материи кварки не являются свободными частицами в силу конфайнмента. Они встречаются лишь в связанном состоянии в виде бесцветных комбинаций. С ростом химического потенциала барионы подходят настолько близко друг к другу, что кварки становятся свободными частицами. При достаточно больших химических потенциалах возникает фаза цветовой сверхпроводимости.

Однако между этими двумя фазами при «промежуточных» значениях μ может возникнуть еще и ферромагнитная фаза. При некоторых параметрах возможен фазовый переход между ферромагнитным и сверхпроводящим состояниями. При нулевой или достаточно низких температурах возможна нетривиальная структура фаз, связанная с немонотонной зависимостью выигрыша энергии фермионов в хромагнитном поле от их плотности. По мере роста химического потенциала сначала может оказаться более выгодным ферромагнитное состояние, потом сверхпроводящее, потом снова ферромагнитное, и лишь при достаточно больших химических потенциалах фермионов сверхпроводящее состояние становится всегда более выгодным.

При достаточно высоких температурах ($\sim \sqrt{gB_0}$) структура фаз упрощается. Выигрыш фермионной энергии перестает зависеть от температуры и становится монотонным по μ . При малых μ более выгодна ферромагнитная фаза, при достаточно больших — сверхпроводящая фаза, и между ними есть только одна точка перехода. По температурной шкале стабилизация наступает при $T > T(\mu)$, где $T(\mu)$ — минимальная температура, необходимая для того, чтобы сгладить осцилляции потенциала Ω , возникающие из-за дискретности спектра фермионов. Теоретические предположения и компьютерный расчет показывают, что функция $T(\mu)$ должна быть убывающей.

В настоящей работе был сделан ряд упрощающих допущений, поэтому результаты носят качественный характер. Дальнейшие исследования могут лучше выявить природу механизма, ограничивающего размеры домена хромагнитного поля, а также учесть граничные эффекты. Для создания более реалистичной картины необходимо учесть квантовые флуктуации бозонов в окрестности «истинного вакуума». Как показали оценки, при химических потенциалах, допускающих ферромагнитное состояние, весьма условным является предположение о малости взаимодействия между кварками. Определенные изменения в картину может привнести также учет взаимодействия кварков с заряженным бозонным конденсатом. Наконец, надо учитывать, что в случае калибровочной группы $SU(3)$ возможны состояния, в которых в одной из абелевых подгрупп $U(1)$ имеет место цветовой ферромагнетизм, а в другой — цветовая сверхпроводимость.

Авторы благодарят М. Мюллера-Пройскера за полезные советы и за обсуждение результатов работы, а также за поддержку. Данная работа выполнена в рамках проекта DFG 436 RUS 113/477/4.

Литература

1. Savvidy G.K. // Phys. Lett. 1977. **71B**. P. 133.
2. Matinyan S.C., Savvidy G.K. // Nucl. Phys. 1978. **B143**. P. 539.
3. Nielsen N.K., Olesen P. // Nucl. Phys. 1978. **B144**. P. 330.
4. Nielsen N.K., Olesen P. // Nucl. Phys. 1979. **B160**. P. 380.
5. Skalozub V., Bordag M. // Nucl. Phys. 2000. **B576**. P. 430.
6. Skalozub V.V., Strelchenko A.V. // Eur. Phys. J. 2004. **C33**. P. 105.
7. Starinets A.O., Vshiotsev A.S., Zhukovsky V.Ch. // Phys. Lett. 1994. **322**. P. 403.
8. Ebert D., Zhukovsky V.Ch., Vshiotsev A.S. // Int. J. Mod. Phys. 1998. **A13**. P. 1723.
9. Iwazaki A., Morimatsu O. // Phys. Lett. 2003. **B571**. P. 61; nucl-th/0304005.
10. Iwazaki A., Morimatsu O., Nishikawa T., Ohtani T. // Phys. Lett. 2004. **B579**. P. 347; hep-ph/0309066.
11. Iwazaki A., Morimatsu O., Nishikawa T., Ohtani T. // Phys. Rev. 2005. **D71**. P. 034014; hep-ph/0404201.
12. Zhang S.C., Hanson H., Kivelson S. // Phys. Rev. Lett. 1989. **62**. P. 82.
13. Alford M. // Prog. Theor. Phys. Suppl. 2004. **153**. P. 1; nucl-th/0312007.
14. Shovkovy I.A. // nucl-th/0410091.
15. Yakovlev D.G., Kaminker A.D., Haensel P., Gnedin O.Y. // Astron. Astrophys. 2002. **L24**. P. 389.
16. Walter F.M., Lattimer J.M. // Astrophys. J. 2002. **L145**. P. 576.
17. Semenov G.W. // Phys. Rev. Lett. 1988. **61**. P. 516.
18. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В. Калибровочные поля. М., 1986.
19. Ebert D., Khudiyakov V.V., Zhukovsky V.Ch., Klimenko K.G. // hep-ph/0106110.
20. Rajagopal K., Wilczek F. // hep-ph/0011333v2.

Поступила в редакцию
29.12.04