ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 514.752.4; 517.95

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЗАИМОСВЯЗЬ ЛОКАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЭКЛУНДА С ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ ВЕКУА И КОУЛА–ХОПФА

Д. В. Тихомиров

(*кафедра математики*)

E-mail: dmitrytv@mtu-net.ru

Проводится формализация преобразований Бэклунда для дифференциальных уравнений, основанная на локальном взаимном преобразовании соответствующих метрик. Устанавливается взаимосвязь преобразований Бэклунда с преобразованием Векуа и Коула–Хопфа.

Введение

В работе проводятся построения преобразований Бэклунда для известных уравнений математической физики, основанные на локальном взаимном преобразовании соответствующих метрик [1, 2]. Устанавливается взаимосвязь преобразований Бэклунда с преобразованием Векуа для локального решения эллиптического уравнения Лиувилля и преобразованием Коула–Хопфа, связывающего локальное решение уравнения Бюргерса с решением уравнения теплопроводности.

1. Псевдосферическая метрика общего вида

Рассмотрим метрику модели Клейна геометрии Лобачевского [3]:

$$ds^2 = \frac{1}{\widetilde{x}^2}(d\widetilde{x}^2 + d\widetilde{t}^2). \tag{1}$$

Осуществим переход от переменных $(\widetilde{x},\widetilde{t})$ к переменным (x,t) по формулам

$$\begin{cases} \widetilde{x} = u(x,t), \\ \widetilde{t} = v(x,t), \end{cases}$$

где $u(x,t)$, $v(x,t)$ — произвольные функции требуемой гладкости, удовлетворяющие условию $\frac{D(u,v)}{D(x,t)} \neq 0$, $u(x,t) \neq 0$. Таким образом, в новых переменных выражение для метрики (1) принимает вид [2]

$$ds^2 = \frac{(u_x dx + u_t dt)^2}{u^2} + \frac{(v_x dx + v_t dt)^2}{u^2}. \tag{2}$$

Поскольку произвольная метрика гауссовой кривизны $K \equiv -1$ локально приводится к метрике плоскости Лобачевского [3] и гауссова кривизна инвариантна относительно замены переменных, то формула (2) локально представляет собой общий вид псевдосферической метрики ($K \equiv -1$).

2. Локальные преобразования Бэклунда для эллиптического уравнения Лиувилля

Рассмотрим метрику гауссовой кривизны $K \equiv \equiv -1$, отвечающую эллиптическому уравнению Лиувилля $\Delta\Omega = e^{2\Omega}$ [1]:

$$ds^2 = e^{2\Omega}(dx^2 + dt^2). \tag{3}$$

Согласно предыдущему пункту, локальной заменой координат $u(x,t)$, $v(x,t)$ рассматриваемая метрика (3) приводится к виду (2):

$$\begin{cases} e^{2\Omega} = \dfrac{1}{u^2}(u_x^2 + v_x^2), \\ 0 = \dfrac{1}{u^2}(u_x u_t + v_x v_t), \\ e^{2\Omega} = \dfrac{1}{u^2}(u_t^2 + v_t^2). \end{cases}$$

В результате получим систему дифференциальных соотношений на неизвестные функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ [2]:

$$\begin{cases} u_x^2 + v_x^2 = u_t^2 + v_t^2, \\ u_x u_t + v_x v_t = 0, \\ \dfrac{D(u,v)}{D(x,t)} \neq 0. \end{cases}$$

Путем алгебраических вычислений получим, что общим решением данной системы является пара функций, удовлетворяющая условиям Коши–Римана ($u_x = v_t$, $u_t = -v_x$ или $v_x = u_t$, $v_t = -u_x$) и $\frac{D(u,v)}{D(x,t)} \neq 0$, что в свою очередь приводит к выполнению уравнения Лапласа $\Delta u = 0$.

С другой стороны, рассмотрим гармоническую функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$. Из факта существования локально гармонической функции $v(x,t)$, сопряженной к $u(x,t)$, следует выполнение условий Коши-Римана ($u_x = v_t$, $u_t = -v_x$), и, сравнивая далее метрики (2) и (3), получаем известное преобразование Векуа решения уравнения Лапласа $u(x,t)$ к решению уравнения Лиувилля $\Omega(x,t)$:

$$\Omega(x,t)=\frac{1}{2}\ln\frac{u_x^2+u_t^2}{u^2}. \qquad (4)$$

Соотношение (4) является общим локальным решением уравнения Лиувилля. Действительно, каждому решению уравнения Лапласа ($u_x+u_t\neq 0$) по формуле (4) соответствует некоторое решение уравнения Лиувилля; существование обратного отображения следует из существования локальной замены координат.

3. Общее локальное решение обобщенного эллиптического уравнения Лиувилля

Рассмотрим обобщенное уравнение Лиувилля $\Delta\Omega=e^{-2K\Omega}$, где $K\equiv\mathrm{const}\neq 0$.

Пусть $\Omega(x,t)$ — функция, удовлетворяющая уравнению $\Delta\Omega=e^{-2K\Omega}$, а $\Omega_0(u,v)$ — произвольное фиксированное частное решение рассматриваемого уравнения в переменных $\{u,v\}$. Рассмотрим далее две метрики:

$$ds_1^2=e^{-2K\Omega}(dx^2+dt^2),$$
$$ds_2^2=e^{-2K\Omega_0}(du^2+dv^2),$$

гауссовы кривизны которых совпадают и равны ненулевой константе K, присутствующей в обобщенном уравнении Лиувилля.

Произведем локальную замену переменных $\begin{cases}u=u(x,t)\\ v=v(x,t)\end{cases}$, $\frac{D(u,v)}{D(x,t)}\neq 0$, приводящую метрику ds_2^2 к виду ds_1^2 (существование замены переменных следует из соответствующей теоремы работы [3] и условия $K\equiv\mathrm{const}$). Сравнивая метрические коэффициенты, получаем систему

$$\begin{cases}e^{-2K\Omega}=e^{-2K\Omega_0}(u_x^2+v_x^2),\\ 0=e^{-2K\Omega_0}(u_xu_t+v_xv_t),\\ e^{-2K\Omega}=e^{-2K\Omega_0}(u_t^2+v_t^2),\end{cases}$$

общее решение которой относительно функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$ поставляет пару функций, связанную условиями Коши–Римана ($u_x=v_t,\ u_t=-v_x$ или $v_x=u_t,\ v_t=-u_x$) и условием $\frac{D(u,v)}{D(x,t)}\neq 0$, при этом функция $u(x,t)$ будет удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta u=0$. Проводя рассуждения аналогичные предыдущему пункту и выражая решение $\Omega(x,t)$ уравнения $\Delta\Omega=e^{-2K\Omega}$, получим:

$$\Omega(x,t)=\Omega_0(u(x,t),v(x,t))-\frac{1}{2K}\ln(u_x^2+u_t^2),$$

где функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Таким образом, общее локальное решение обобщенного уравнения Лиувилля выражается через частное решение Ω_0 и произвольное решение уравнения Лапласа.

1. Выберем для случая $K<0$ частное решение в виде $\Omega_0(u,v)=-\frac{1}{2K}\ln\left(-\frac{1}{Ku^2}\right)$. Тогда общее локальное решение $\Omega(x,t)$ принимает вид преобразований Векуа:

$$\Omega(x,t)=-\frac{1}{2K}\ln\left(-\frac{u_x^2+u_t^2}{Ku^2}\right).$$

2. Для случая $K>0$ рассмотрим $\Omega_0(u,v)=$ $=\frac{1}{2K}\ln\left(\mathrm{ch}^2\left(\sqrt{K}\,u\right)\right)$, что приводит к следующему выражению общего локального решения $\Omega(x,t)$:

$$\Omega(x,t)=\frac{1}{2K}\ln\left(\frac{\mathrm{ch}^2\left(\sqrt{K}\,u\right)}{u_x^2+u_t^2}\right).$$

Приведенные выше рассуждения относительно преобразований Бэклунда имеют отчетливый геометрический характер. Локальные преобразования координат сохраняют гауссову кривизну, изменяя лишь функциональный вид метрики, что и позволяет определить соответствующие преобразования Бэклунда.

Замечание. Данные рассуждения распространяются и на случай евклидовой плоскости ($K\equiv 0$). Соответствующие метрики для реализации локальной замены координат здесь следует выбрать в виде

$$ds_1^2=e^{2\Omega}(dx^2+dt^2),$$
$$ds_2^2=e^{2\Omega_0}(du^2+dv^2),$$

и после аналогичных рассуждений получим одно из известных выражений преобразований Бэклунда для уравнения Лапласа:

$$\Omega(x,t)=\Omega_0(u(x,t),v(x,t))+\frac{1}{2}\ln(u_x^2+u_t^2),$$

где $\Omega_0(u,v)$ — частное решение уравнения Лапласа.

4. Локальные преобразования Бэклунда для уравнения Бюргерса

Обратимся к псевдосферической метрике общего вида (2). Отвечающие данной метрике дифференциальные формы могут быть получены из известного выражения теории подвижного репера [4] $ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2$, например в следующем виде:

$$\begin{cases}\omega^1=\dfrac{v_x}{u}dx+\dfrac{v_t}{u}dt,\\ \omega^2=\dfrac{u_x}{u}dx+\dfrac{u_t}{u}dt.\end{cases} \qquad (5)$$

Известно, что дифференциальные формы, построенные по Λ^2-представлению [1] уравнения Бюргерса, имеют вид

$$\begin{cases}\omega^1=\lambda dx+\dfrac{\lambda w}{2}dt,\\ \omega^2=\dfrac{w}{2}dx+\left(\dfrac{w_x}{2}+\dfrac{w^2}{4}\right)dt.\end{cases} \qquad (6)$$

Преобразуем метрику уравнения Бюргерса к общему виду (2), приравняв попарно дифференциальные формы (5) и (6). Получим следующую систему на функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{u_x}{u} = \dfrac{w}{2}, \quad \dfrac{u_t}{u} = \dfrac{w_x}{2} + \dfrac{w^2}{4}, \\ \dfrac{v_x}{u} = \lambda, \quad \dfrac{v_t}{u} = \dfrac{\lambda}{2} w. \end{cases} \tag{7}$$

Для того чтобы система (7) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы смешанные производные функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$ были равны.

Из двух последних равенств системы (7) с учетом первого имеем:

$$\begin{cases} v_x = \lambda u, \\ v_t = \lambda u \dfrac{w}{2} = \lambda u_x. \end{cases} \tag{8}$$

Из первых двух равенств (7):

$$\begin{cases} u_{xt} = \dfrac{u_t w}{2} + \dfrac{u w_t}{2}, \\ u_{tx} = u_x \left(\dfrac{w_x}{2} + \dfrac{w^2}{4} \right) + \dfrac{u}{2}(w_{xx} + w w_x). \end{cases} \tag{9}$$

Приравняем смешанные производные в (9), получим:

$$\frac{u}{2}(w_t - w_{xx} - w w_x) + \frac{u_t w}{2} = u_x \left(\frac{w_x}{2} + \frac{w^2}{4} \right). \tag{10}$$

Поскольку функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению Бюргерса, уравнение (10) примет вид

$$\frac{u_t w}{2} = u_x \left(\frac{w_x}{2} + \frac{w^2}{4} \right). \tag{11}$$

С учетом первого равенства (7) приведем соотношение (11) к виду

$$\frac{u_t}{u} = \frac{w_x}{2} + \frac{w^2}{4},$$

что совпадает со вторым равенством системы (7). Итак, условие совместности для функции $u(x,t)$ выполнено.

Приравняем смешанные производные функции $v(x,t)$ в системе (8):

$$u_t = u_{xx}.$$

Таким образом, функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности.

Из первого уравнения системы (7) получим следующее выражение для решения уравнения Бюргерса через некоторое решение уравнения теплопроводности $u(x,t)$:

$$w = \frac{2u_x}{u}. \tag{12}$$

Рассматривая произвольное решение уравнения теплопроводности, путем прямой подстановки выражения (12) в уравнение Бюргерса получим, что формула (12) выражает локальное решение уравнения Бюргерса через некоторое решение уравнения теплопроводности. Данная формула известна как преобразование Коула–Хопфа для уравнения Бюргерса.

Литература

1. *Позняк Э.Г., Попов А.Г.* // Докл. РАН. 1993. **332**, №4. С. 418.
2. *Зададаев С.А.* Λ^2-представления уравнений математической физики и их некоторые приложения. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1999.
3. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения: В 2 т. М., 1998.
4. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., 1971.
5. *Габов С.А.* Введение в теорию нелинейных волн. М., 1988.

Поступила в редакцию
03.03.04